S. Bijakowski GDT "Rép galoisienne, formes automorphes et la conj. de Breuil-Mézard"

I. Representations galoisiennes

Notations: $K/\mathbb{Q}_p$ fini, $\mathcal{O}_K, k$, $\mathbb{Q}_p \subset E \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ suff. grand, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_E$, $\mathbb{F}$ c.res. de E.
B une E-algebre, V_B un B-module libre de type fini avec action continue potentiellement semi-stable de $G_K = Gal(\overline{K}/K)$.
$D_{dR}(V_B) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_B)^{G_K}$: $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$-module filtré libre de rang $rg_B V_B$.

Definitions (poids de Hodge-Tate)

$\forall \sigma : K \hookrightarrow E$, $HT_\sigma(V_B)$ contient i avec la multiplicité $rk_B\, gr^i(D_{dR}(V_B) \otimes_\sigma B)$:
$\mathbb{Z}_+^{2} = \{(\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1 \geq \lambda_2\}$, $rg_B V_B = 2$

Definition: $\lambda \in (\mathbb{Z}_+^2)^{Hom(K,E)}$. On dit que V_B a poids de HT λ si $\forall \sigma : K \hookrightarrow E$
$HT_\sigma(V_B) = \{\lambda_{\sigma,1}+1, \lambda_{\sigma,2}\}$.

Type inertiel: $\tau : I_K \to GL_2(E)$ t.q. $\exists E'/E$ tel $\tau' : W_K \to GL_2(E')$ avec $\tau'|_{I_K} = \tau$.

Def. On dit que V_B a type de Galois τ si $\forall i \in I_K$, $Tr(\tau(i)) = Tr(i \mid D_{pst}(V_B))$

$G_K \circlearrowright D_{pst}(V_B) = (B_{st} \otimes_{G_{\mathbb{Q}_p}} V_B)^{G_L}$, L/K fini

Problème de deformation : $\bar{r} : G_K \to GL_2(\mathbb{F})$ continue,

$F^{\square}_{\bar{r}} : \{\mathcal{O}\text{-alg. local } R, \mathbb{F}\} \longmapsto \{\rho : G_K \to GL_2(R) \text{ t.q. } \bar{\rho} = \bar{r}\}$;

"$F^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}} : \{ - " - \} \longmapsto \{\rho : G_K \to GL_2(R) \text{ t.q. } \bar{\rho} = \bar{r},\ \rho \text{ pot. cristal. poids de HT } \lambda, \text{ type Galois } \tau\}$"

Prop. Les foncteur $F^{\square}_{\bar{r}}$, "$F^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}}$" sont representables par des $\mathcal{O}$-algebres $R^{\square}_{\bar{r}}$, $R^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}}$. De plus $R^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}}$ est sans p-torsion.
$Spec\, R^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}}[\frac{1}{p}]$ formellement lisse, equidimensional de dim $4+[K:\mathbb{Q}_p]$.

Remarque: il faut dire $\exists$ quotient $R^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}}$ de $R^{\square}_{\bar{r}}$. Il n'y a pas de $F^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}}$ parce que il n'y a pas de def. de pot. cristal par l'alg. de torsion.

Lemme : Si $\bar{\Psi} : G_K \to \mathbb{F}^\times$ non-ramifié, $R^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}} \cong R^{\square,\lambda,\tau}_{\bar{r}\otimes\bar{\Psi}}$

Thm (Henniart) $\forall \tau$ type inertiel $\exists \sigma(\tau)$ rep. irreductible de dim finie de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$
$\forall \tilde{\tau}$ rep. de dim 2, ϕ-s.s. de WD_K.

$$\sigma(\tau) \subset (rec_p^{-1}(\tilde{\tau})^\vee)_{|GL_2(\mathcal{O}_K)} \iff \begin{cases} \tilde{\tau}_{|I_K} = \tau \\ N = 0 \text{ pour } \tilde{\tau}. \end{cases}$$

En plus: $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_p} Hom_{GL_2(\mathcal{O}_K)}(\sigma(\tau), (rec_p^{-1}(\tilde{\tau})^\vee)) \leq 1$.

Soit $\lambda \in (\mathbb{Z}_+^2)^{\mathrm{Hom}(K,E)}$, $\tau : I_K \to GL_2(E)$, $W_\lambda = \bigotimes_\sigma \det^{\lambda_{\sigma,2}} \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_{\sigma,1}-\lambda_{\sigma,2}} \mathcal{O}_K^2 \otimes_{\mathcal{O}_{K,\sigma}} \mathcal{O}$

$L_{\lambda,\tau} \subset W_\lambda \otimes \sigma(\tau)$: $\mathcal{O}$-reseau stable. ; π uniformisante de E.

<u>Conj. (Breuil-Mezard)</u> $\exists \mu_\sigma(\bar{r}) \in \mathbb{N}$ $\forall \sigma, \lambda$ $\forall \tau$:

$$e(R_{\bar{r}}^{\square,\lambda,\tau}/\pi) = \sum_\sigma \mu_\sigma(\bar{r})\, m(\sigma) \quad \text{où} \quad (L_{\lambda,\tau} \otimes \mathbb{F})^{ss} \cong \bigoplus \sigma^{m(\sigma)}$$

multiplicité de Hilbert-Samuel $\qquad$ σ rep. irreductible de $GL_2(k)$

<u>Def.</u> $(A, \mathfrak{m})$ un anneau local : $\mathrm{long}(A/\mathfrak{m}^{n+1}A) = e(A)\frac{n^d}{d!} + \dots$ $\forall n \gg 0$ ... mod p

$e(A)$ = multiplicité de H.-S. de A.

<u>Poids de Serre locaux</u> : <u>def.</u> un poids de Serre local est une $\mathbb{F}$-rep. irred. de $GL_2(k)$.

$$a \in (\mathbb{Z}_+^2)^{\mathrm{Hom}(k,\mathbb{F})}_{sw} = \{ (a_{\sigma,1} \geq a_{\sigma,2}),\ p-1 \geq a_{\sigma,1} - a_{\sigma,2} \}$$

$$\Rightarrow \sigma_a = \bigotimes_{\sigma : k \hookrightarrow \mathbb{F}} \det^{a_{\sigma,2}} \otimes \mathrm{Sym}^{a_{\sigma,1}-a_{\sigma,2}} k^2 \otimes_\sigma \mathbb{F}$$

<u>Prop.</u> σ un poids de Serre local. $\exists a \in (\mathbb{Z}_+^2)_{sw}$: $\sigma \cong \sigma_a$.

<u>Def</u> $a \sim a'$ si $\sigma_a \cong \sigma_{a'}$ $\quad (\Rightarrow a_{\sigma,2} - a_{\sigma,1} = a'_{\sigma,2} - a'_{\sigma,1})$

$\Sigma = \mathrm{Hom}(k,E) \to \bar{\Sigma} = \mathrm{Hom}(k,\mathbb{F})$

$a \in (\mathbb{Z}_+^2)_{sw} \rightsquigarrow \lambda_a \in (\mathbb{Z}_+^2)^\Sigma$ $\quad \forall \bar{\sigma} \rightsquigarrow \phi(\bar{\sigma}) \in \Sigma$ $\qquad \phi \in \Sigma$

$R_{\bar{r}}^{\square,\lambda,\tau}$, si $\tau = 1$: $R_{\bar{r}}^{\square,\lambda}$ $\qquad \lambda_{a,\sigma,i} = \begin{cases} a_{\bar{\sigma},i} & \text{si } \sigma = \phi(\bar{\sigma}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$R_{\bar{r}}^{\square,a} := R_{\bar{r}}^{\square,\lambda_a}$

<u>Prop.</u> Si $a \sim a'$ alors $R_{\bar{r}}^{\square,\lambda_a} \cong R_{\bar{r}}^{\square,\lambda_{a'}}$.

$\Rightarrow$ On note $R_{\bar{r}}^{\square,\sigma} = R_{\bar{r}}^{\square,a}$. $\quad (\sigma = \sigma_a)$

<u>Def.</u> On dit que $\bar{r}$ a <u>un relevement de type Hodge σ</u> si $R_{\bar{r}}^{\square,\sigma} \neq 0$.

<u>Def</u> $K/\mathbb{Q}_p$ non-ramifié. $\underline{\underline{a}}$ est reg

- regulier si $p-2 \geq a_{\sigma,2} - a_{\sigma,1}$
- Fontaine-Lafaille regulier si $p-3 \geq a_{\sigma,2} - a_{\sigma,1}$.

2. Formes automorphes algébriques

- $F^+/\mathbb{Q}$ corps tot. réel, F/F^+ extension CM, F/F^+ non ramifiée,
- $\forall v|p$ de F^+, v est totalement décomposé, $c \in Gal(F/F^+)$

GL_2/O_F, $g \longrightarrow ({}^t g^c)^{-1}$.

G groupe défini par : $\forall_R$ O_{F^+}-alg. $G(R) = \{ g \in GL_2(O_F \otimes_{O_{F^+}} R),\ {}^t g^c g = 1 \}$ gp unitaire

- $\iota : G/O_F \cong GL_2/O_F$
- v place de F^+, $v = ww^c$, $i_w : G(O_{F_v^+}) \xrightarrow{\sim} GL_2(O_{F_w})$, $i_{w^c} : G(O_{F_v^+}) \xrightarrow{\sim} GL_2(O_{F_{w^c}})$

$i \circ c \circ i^{-1}(g) = ({}^t g^c)^{-1}$; $i_w \circ i_{w^c}^{-1}(g) = ({}^t g)^{-1}$.

$S_p = \{ v$ place de F^+, $v|p \}$, pour $v \rightsquigarrow \tilde{v}$ place de F au-dessus de v.

$S_p = \{ \tilde{v} \}$, $F_p^+ = F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$, $O_{F_p^+}$.

W un $\mathcal{O}$-module avec l'action de $G(O_{F_p^+})$. U ss-gp ouvert compact de $G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$

t.q. $\forall u \in U \rightsquigarrow u_p \in G(O_{F_p^+})$

<u>Déf.</u> l'espace $S(U,W)$ des <u>formes automorphes algébriques</u> niveau U, poids W

c'est : $\{ f : G(F^+) \backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty) \longrightarrow W \ :\ f(gu) = u_p^{-1} f(g)\ \forall g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty) \}$

$G(F^+) \backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty) / U = \{ t_i \}$; $S(U,W) \cong \bigoplus_i W^{U \cap t_i^{-1} G(F^+) t_i}$

$f \in S(U,W)$, $t_i u = g t_i$ avec $g \in G(F^+)$ $\quad f \longmapsto \{ f(t_i) \}_i$

$u = t_i^{-1} g t_i$, $u_p^{-1} f(t_i) = f(t_i)$.

<u>Déf.</u> U est <u>suffisement petit</u> si $\exists_v$ place de F^+ t.q. $U \to G(F_v^+)$ ne contient pas d'élément d'ordre fini autre que 1.

$\left(\Rightarrow U \cap t_i^{-1} G(F^+) t_i = \{1\}. \quad \text{et} \quad S(U,W) \otimes_{\mathcal{O}} A) \cong S(U,W) \otimes_{\mathcal{O}} A \right.$ $\quad A = \mathcal{O}$-algebre $\Big)$

$\tilde{I}_{\tilde{v}} = \{ \sigma : F \hookrightarrow E$ au dessus de $\tilde{v} \}$, $\tilde{I}_p = \bigcup_{\tilde{v}} \tilde{I}_{\tilde{v}}$.

$\forall \lambda \in (\mathbb{Z}_+^2)^{\tilde{I}_{\tilde{v}}}$, $W_\lambda = \bigotimes_{\sigma \in \tilde{I}_{\tilde{v}}} \det{}^{\lambda_{\sigma,2}} \otimes Sym^{\lambda_{\sigma,1} - \lambda_{\sigma,2}} F_{\tilde{v}}^2 \otimes_{F_{\tilde{v}}, \sigma} E \circlearrowleft GL_2(O_{F_{\tilde{v}}}) \cong G(O_{F_v^+})$

$\forall \lambda \in (\mathbb{Z}_+^2)^{\tilde{I}_p}$ $\quad W_\lambda = \bigotimes_{v \in S_p} W_{\lambda_v} \circlearrowleft G(O_{F_p^+})$

$\forall v \in S_p$, τ_v type inertiel pour $G_{F_v^+} \rightsquigarrow \sigma(\tau_v)$ rep. de $GL_2(\mathcal{O}_{F_v^+}) \cong G(\mathcal{O}_{F_v^+})$.

$\sigma(\tau) = \bigotimes_{v \in S_p} \sigma(\tau_v)$. On prends $L_{\lambda,\tau} \subset W_\lambda \otimes \sigma(\tau)$ reseau stable par $G(\mathcal{O}_{F_p^+})$

<u>Definition</u>: $S_{\lambda,\tau}(U, A) = S(U, L_{\lambda,\tau} \otimes_{\mathcal{O}} A)$.

<u>Definition</u>: U est <u>bon</u> si $U = \prod_v U_v$, $U_v \subset G(F_v^+)$ t.q.

- $U_v \subset G(\mathcal{O}_{F_v^+})$ si v decomposée ds F, • $U_v = G(\mathcal{O}_{F_v^+})$ si $v \mid p$ ou v inerte ds F.

U <u>bon</u>, T ensemble fini de places, T contient S_p, T contient v decompose avec $U_v \neq G(\mathcal{O}_{F_v^+})$.

$\mathbb{T}^{T,\text{univ}}$: $\mathcal{O}$-alg. comm. engendré par $T_w^{(j)}$, $j = 1,2$, w place de F, $v \notin T$ decomposé.

$\lambda \in (\mathbb{Z}_+^2)^{\Sigma_p}$, τ : $\mathbb{T}^{T,\text{univ}} \hookrightarrow S_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})$

<u>action</u>: $T_w^{(j)} = i_w^{-1}\left[GL_2(\mathcal{O}_{F_w}) \begin{pmatrix} \pi_w \mathbb{1}_j & \\ & \mathbb{1}_{2-j} \end{pmatrix} GL_2(\mathcal{O}_{F_w})\right]$

$\rightsquigarrow \mathbb{T}^T_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O}) =$ im de $\mathbb{T}^{T,\text{univ}}$ ds $\mathrm{End}_{\mathcal{O}} S_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})$.

$\mathfrak{m}$ ideal maximale de $\mathbb{T}^{T,\text{univ}}$, corp. res. $\mathbb{F}$.

<u>Def.</u> $\mathfrak{m}$ est <u>automorphe</u> si $S_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}} \neq 0$ pour certain (λ, τ).

Soit $\bar{r} : G_F \to GL_2(\mathbb{F})$ abs. irred. et continue.

$\bar{r}$ <u>automorphe</u> si $\exists \mathfrak{m}$ automorphe t.q. $\forall v \notin T$ decomposé, $v = ww^c$

$\bar{r}(\mathrm{Frob}_w)$ a polynom caracteristique $X^2 - T_w^{(1)} X + (Nw) T_w^{(2)} \in \mathbb{F}[X]$.

<u>$G_2/\mathbb{Z}$</u> $:= (GL_2 \times GL_1) \rtimes \{1, j\}$: $j(g, \mu) j^{-1} = (\mu^t g^{-1}, \mu)$

soit $\nu : G_2 \to GL_1$ via $(g, \mu) \mapsto \mu$, $j \mapsto -1$.

<u>Proposition</u>: $\exists \bar{\rho} : G_{F^+} \to G_2(\mathbb{F})$ avec $\bar{\rho}|_{G_F} = (\bar{r}, \bar{\varepsilon}^{-1})$, $\nu \circ \bar{\rho} = \bar{\varepsilon}^{-1}$.

$G_{F^+,T} = \mathrm{Gal}(F(T)/F^+)$, $G_{F,T} = \mathrm{Gal}(F(T)/F)$, $F(T)$ = ext. maxim. non-ram. en dehors de T.

<u>Thm</u> $\forall (\lambda, \tau)$ $\exists!$ relevement $\rho_{\mathfrak{m}} : G_{F^+,T} \to G_2(\mathbb{T}^T_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}})$ de $\bar{\rho}$. t.q.:

(1) $\rho_{\mathfrak{m}}^{-1}(GL_2 \times GL_1) = G_{F,T}$ (2) $\nu \circ \rho_{\mathfrak{m}} = \varepsilon^{-1}$.

(3) $\rho_{\mathfrak{m}}$ non-ramifié en dehors de T, $v \notin T$, $v = ww^c$, $\rho_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Frob}_w)$ a poly. car. $X^2 - T_w^{(1)} X + (Nw) T_w^{(2)}$.

(4) $\forall v \in S_p$, $x : \mathbb{T}^T_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$: $x \circ \rho_{\mathfrak{m}}|_{G_{F_v}}$ pot. cristl., HT λ_v, type τ_v.

<u>pacets de Serre global</u>: <u>Def.</u>: rep. abs. irred. mod p de $G(\mathcal{O}_{F_p^+})$

$\forall v \in S_p$, k_v cor. rés. $a = (a_v)_{v \in S_p}$, $a_v \in (\mathbb{Z}_+^2)^{\mathrm{Hom}(k_v, \mathbb{F})}_{\mathrm{SW}}$, $\sigma_a = \bigotimes_{v \in S_p} \sigma_{a_v}$