B. Schraen "Intro"

I. Anneaux de déformations

a) Définitions : $K/\mathbb{Q}_p$ finie, $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, $E/\mathbb{Q}_p$ finie, $\mathcal{O}_E$, $\mathbb{F} = \mathcal{O}_E/\varpi$

E suff. grande : $|\mathrm{Hom}_{alg}(K,E)| = [K:\mathbb{Q}_p]$. $(\bar{\rho}, \bar{V})$ rep. continue de G_K sur un $\mathbb{F}$-e.v. $\bar{V}$ de dim finie.

Def A une $\mathcal{O}_E$-alg. locale artinienne de corps res. $\mathbb{F}$, une déformation de $\bar{\rho}$ est (ρ, V, ι) où V est un A-module libre de rang fini, $\rho : G_K \to \mathrm{Aut}_A(V)$ et $\iota : V \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} \bar{V}$ G_K-equiv.

$$\mathrm{Déf}_{\bar{\rho}}(A) = \{(\rho, V, \iota)\}/\simeq .$$

Thm. (Mazur) Si $\mathrm{End}_{G_K}(\bar{\rho}) = \mathbb{F}$, le foncteur $\mathrm{Déf}_{\bar{\rho}}$ est pro-représentable : $\exists R(\bar{\rho})$ une $\mathcal{O}_E$-alg locale complète t.q. $\mathrm{Hom}_{cont}(R(\bar{\rho}), -) \simeq \mathrm{Déf}_{\bar{\rho}}(-)$.
En plus, $R(\bar{\rho})$ est noethérienne.

Exemple : Supposons que $\mathrm{Hom}_{G_K}(\bar{V}, \bar{V}(1)) = 0$ et $\mathrm{End}(\bar{\rho}) = \mathbb{F}$ alors
$R(\bar{\rho}) \simeq \mathcal{O}_E[[X_1, \dots, X_d]]$, $d = [K:\mathbb{Q}](\dim \bar{V})^2 + 1$ ($\Leftarrow$ dualité de Tate)

Variantes • $\psi : G_K \to \mathcal{O}_E^\times$, $\mathrm{Def}^\psi_{\bar{\rho}}(A) \subset \mathrm{Def}_{\bar{\rho}}(A)$
$\{(\rho, V, \iota)$ t.q. $\det(\rho) = \psi\}$

et on obtient $R(\bar{\rho}) \twoheadrightarrow R^\psi(\bar{\rho})$ (cas non-obstrué, $\dim(R^\psi(\bar{\rho})) = ([K:\mathbb{Q}](\dim V)^2 - 1) + 1$)

• fixons $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ base de $\bar{V}$.

$$\mathrm{Def}^\square_{\bar{\rho}}(A) = \left\{(\rho, V, \iota, e) \mid (\rho, V, \iota) \in \mathrm{Def}_{\bar{\rho}}(A),\ e = (e_i) \text{ base de } V \text{ t.q. } \iota(e_i \otimes 1) = \bar{e}_i\right\}$$

$\Rightarrow$ toujours représentable par $R^\square(\bar{\rho})$.

On a $\mathrm{Def}^\square_{\bar{\rho}}(A) \twoheadrightarrow \mathrm{Def}_{\bar{\rho}}(A) \Rightarrow R(\bar{\rho}) \hookrightarrow R^\square(\bar{\rho})$
(cas non-obstrué)

$R^\square(\bar{\rho}) \simeq R(\bar{\rho})[[X_1, \dots, X_{n^2-1}]]$, $n = \dim \bar{V}$.

b) Représentations potentiellement semi-stables

$\rho : G_K \to \mathrm{Aut}_E(V)$, $E/\mathbb{Q}_p$ ρ est de Rham $\rightsquigarrow D_{dR}(V) = (V \otimes B_{dR})^{G_K}$
$\uparrow$ $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module libre

$\rightsquigarrow$ filtration sur $D_{dR}(V)$ - $K \otimes E$ sous-modules

$$K \otimes E \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma : K \hookrightarrow E} E \rightsquigarrow D_{dR}(V) = \bigoplus_{\sigma : K \hookrightarrow E} D_{dR}(V)_\sigma$$
E-e.v.

donc $\Leftrightarrow$ $[K:\mathbb{Q}_p]$ filtrations $(\mathrm{Fil}^i D_{dR}(V))_\sigma$.

Type de Hodge-Tate de V : $\lambda(V) = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,E)}$

où $\lambda_\sigma = \{$ sauts de la filtration de $D_{dR}(V)_\sigma \}$

Supposons ρ pot. semistable ($\Leftrightarrow$ de Rham) : $\exists L/K$ finie t.q. $\rho|_{G_L}$ semi-stable

$(V \otimes B_{st})^{G_L} =: D_{pst}(V) \leftarrow (L_0 \otimes E)$-module libre avec l'action de (φ, N) et de $\mathrm{Gal}(L/K)$

($L_0 \subset L$ max non-ram.)

quitte à agrandir E on a $|\mathrm{Hom}(L,E)| = [L : \mathbb{Q}_p]$.

$$D_{pst}(V) = \bigoplus_{\sigma : L_0 \hookrightarrow E} D_{pst}(V)_\sigma$$

$\circlearrowleft I_K$

La rep. de I_K, $D_{pst}(V)$ ne depend pas de σ. $\rightsquigarrow \tau(\rho)$ la classe d'iso

<u>Thm. (Kisin)</u> λ type de HT, τ type inertiel (de dim n) $\Rightarrow$ <u>type inertiel de ρ</u>

$\bar{\rho} : G_K \to \mathrm{Aut}(\bar{V})$, $\dim_k \bar{V} = n$. Alors $\exists$ un plus petit quotient

$R(\bar{\rho}, \lambda, \tau)$ de $R(\bar{\rho})$ t.q. si $E/\mathbb{Q}_p$ finie, $x : R(\bar{\rho}) \to E$ se factorise par $R(\bar{\rho}, \lambda, \tau)$

si ρ_x est pot. semistable de type (λ, τ).

De plus, $R(\bar{\rho}, \lambda, \tau)$ est sans ϖ-torsion, $R(\bar{\rho}, \lambda, \tau)[\frac{1}{p}]$ est reduite et

$\mathrm{Spec}(R(\bar{\rho}, \lambda, \tau)[\frac{1}{p}])$ est equidimensionnel, de dimension $1 + \dim\left(\frac{\mathrm{End}(D(\lambda))}{\mathrm{Fil}^0(\mathrm{End}(D(\lambda)))}\right)$

et generiquement lisse (où $D(\lambda)$ est D_{pst} de n'importe quelle rep. de type λ)

<u>variante</u> : prends pot. cris. : $R^{cr}(\bar{\rho}, \lambda, \tau)$. Les composantes irreductibles

de $\mathrm{Spec}(R^{cr}(\bar{\rho}, \lambda, \tau)[\frac{1}{p}])$ sont lisses.

<u>II. Un exemple</u>

Theorie de Fontaine-Laffaille. $K = \mathbb{Q}_p$, $\lambda = (\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n)$ t.q. $\lambda_n - \lambda_0 \leq p-2$

<u>Thm (F.-L.)</u> L'anneau $R^{cr}(\bar{\rho}, \lambda, \mathbb{1})$ est formellement lisse : $\cong \mathcal{O}_E[[x_1, \ldots, x_d]]$

<u>Idée de preuve</u> : $\mathcal{M}$ = categorie de modules de Fontaine-Laffaille :

$(M, \varphi_i, \mathrm{Fil}^\bullet)$: M est un $\mathcal{O}_E$-module de longueur finie

$\mathrm{Fil}^i M$: filtration par des sous $\mathcal{O}_E$-modules, facteurs direct :

$\varphi_i : \mathrm{Fil}^i M \to M$. t.q. $\varphi_i|_{\mathrm{Fil}^{i+1}} = p\varphi_{i+1}$ et $\sum \varphi_i^i(\mathrm{Fil}^i M) = M$.

On a $G : \mathcal{M} \to \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_E} G_K$

$M \longmapsto G(M)$ pleinement fidele et son image essentielle

est la categorie des reductions mod p^n de reseaux dans de representations cristallines de poids de HT $\in [0, p-2]$

$\rightsquigarrow$ on peut definir un problème de déformations $\mathcal{M}_{\bar{M}} \underset{G}{\hookrightarrow} \mathrm{Def}_{\bar{\rho}}$ $(G(\bar{M}) = \bar{\rho})$

$\Rightarrow \mathcal{M}_{\bar{M}}$ est representable par $R^{cr}(\bar{\rho}, \lambda, \mathbb{1})$

$R := R^{cr}(\bar{\rho}, \lambda, \mathbb{1})$ lisse si $\forall A$, $I \subset A$ I^2 : $\mathrm{Hom}(R, A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(R, A/I)$

$$\mathcal{M}(A) \twoheadrightarrow \mathcal{M}(A/I) \quad \square$$

On peut traiter à la main le cas de $R(\bar{\rho}, (0,1), \tau)$, τ modéré (et $K = \mathbb{Q}_p$)
(Conrad, Savitt)

- le cas de $R^{st}(\bar{\rho}, \lambda, \mathbb{1})$, $\lambda = (0, k-2)$, $k \leq p$ (Breuil-Mézard) $K = \mathbb{Q}_p$.

III. Enoncés des conjectures

a) Correspondances de Langlands inertielle

Conj. $\tau : I_K \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ type inertiel. Alors $\exists$ rep $\sigma(\tau)$ de $GL_n(\mathcal{O}_K)$ lisse, irred. t.q. si π est une rep lisse irred. de $GL_n(K)$ (sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ e.v.),

$$\sigma_{cr}(\tau) \hookrightarrow \pi_{|GL_n(\mathcal{O}_K)} \iff WD(\pi)_{|I_K} = \tau \text{ et } N = 0.$$

Variante: $\exists \sigma(\tau) \dashrightarrow \sigma(\tau) \hookrightarrow \pi_{|GL_n(\mathcal{O}_K)} \iff WD(\pi)_{|I_K} = \tau$
(pour π générique)

remarques : • $n = 2$ (Henniart, et Bushnell-Kutzko)
multiplicité 1 : $\dim \mathrm{Hom}(\sigma, \pi) \leq 1$

• pas unique ; ex. $n = 2$, $K = \mathbb{Q}_2$, $\tau = \eta_1 \oplus \eta_2$, $\eta_1 \eta_2^{-1}{}_{|I_K} \neq 1$

Exemple: $n = 2$, $\tau = \eta_1 \oplus \eta_2$, η_1 et η_2 modérément ramifiés et $\eta_1 \neq \eta_2$

$$\Rightarrow \sigma(\tau) = \mathrm{Ind}_{B(K)}^{GL_2(K)}((\eta_1 \otimes \eta_2) \circ \mathrm{rec})$$

• pour n quelconque, π supercuspidale prouvé par Paskunas.

b) Recettes pour les poids de HT

$\lambda = (\lambda_\sigma)$ type de HT non-dégénéré, $\lambda_\sigma = (\lambda_{\sigma,1} < \dots < \lambda_{\sigma,n})$

On associe à λ un caractère de $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}_p}(T_{/K})$, $T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \subset GL_{n/K}$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}_p}(T), \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Hom}_E\Big(\prod_{\sigma : K \hookrightarrow E} T_{/E}, \mathbb{G}_{m,E}\Big)$$

$$\mu(\lambda) = \Big(\Big(\begin{pmatrix} a_{\sigma,1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{\sigma,n} \end{pmatrix}\Big)\Big)_{\sigma : K \hookrightarrow E} \longmapsto \prod_{\sigma, i} a_{\sigma,i}^{\mu_{\sigma,i}} \quad \text{où } \mu_{\sigma,i} = \lambda_{\sigma,i} - (i-1)$$

et $\sigma(\lambda)$ = rep. alg. irred. de $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}_p} GL_n$ de plus haut poids $\mu(\lambda)$

Ex. : $K = \mathbb{Q}_p$, $n = 2$, $\lambda = (0, n)$, $n > 0$, $\sigma(\lambda) = \mathrm{Sym}^{n-1}(E^2)$.

pour $K/\mathbb{Q}_p$: $\lambda = ((0, n_\sigma)) \rightsquigarrow \sigma(\lambda) = \bigotimes_\sigma \mathrm{Sym}^{n_\sigma - 1}(E_\sigma^2)$

So for $(\sigma, \tau) \rightsquigarrow \sigma(\lambda) \otimes \sigma(\tau) \circlearrowleft GL_n(\mathcal{O}_K)$

c) Énoncés

<u>Conjecture géométrique</u> (λ,τ) types, λ non-dégénéré, $\bar{\rho} : G_K \to \mathrm{Aut}(\bar{V})$ $(\mathrm{End}(\bar{\rho}) = \mathbb{F})$

Pour tout rep. $\mathbb{F}$-linéaire σ irred. de $GL_n(k)$, il existe un cycle $Z_\sigma(\bar{\rho})$ de $\mathrm{Spec}(R(\bar{\rho})/\bar{\omega})$ tels que $\forall_{(\lambda,\tau)}$ on a :

$$Z(\mathrm{Spec}(R(\bar{\rho},\lambda,\tau)/\bar{\omega})) = \sum_\sigma m_\sigma(\lambda,\tau)\, Z_\sigma(\bar{\rho})$$

où $m_\sigma(\lambda,\tau)$ est la multiplicité de σ dans $((\sigma(\tau)\otimes\sigma(\tau))/\bar{\omega})^{ss}$.

<u>pour les cycles</u> : X schéma, $Y \subset X$ sous-schéma fermé $\rightsquigarrow Y^{red} = \bigcup Y_i$ irréd.

$\rightsquigarrow Z(Y) = \sum e(Y_i)\cdot Y_i$ où $e(Y_i) = \lg \mathcal{O}(Y)_{\eta_i}$ où η_i pt gen de Y_i.

<u>conj.</u> (juste multiplicité) : $\forall_{\mathbb{F}\text{-lin. } \sigma} \ldots \exists\, \mu_\sigma(\bar{\rho}) \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall_{(\lambda,\tau)}$

"<u>conj. numérique</u>" $e(R(\bar{\rho},\lambda,\tau)/\bar{\omega}) = \sum_\sigma m_\sigma(\lambda,\tau)\,\mu_\sigma(\bar{\rho})$.

Pour $n=2$, les σ sont en bijection avec les $((n_\sigma, m_\sigma))_{\sigma\in \mathrm{Hom}(k,\bar{\mathbb{F}}_p)}$ $\begin{matrix} 0\le n_\sigma \le p-1 \\ 0 \le m_\sigma \le p-2 \end{matrix}$

par : $((n_\sigma, m_\sigma)) \longmapsto \bigotimes_\sigma \left(\mathrm{Sym}^{n_\sigma}(\bar{\mathbb{F}}_p^2)_\sigma \otimes \det_\sigma^{m_\sigma}\right)$

<u>Thm (Kisin)</u> Si $K = \mathbb{Q}_p$ et $n=2$, la conjecture numérique est vraie ($p>2$, restriction sur $\bar{\rho}$)