Autoreferat rozprawy doktorskiej

P-ADYCZNA LOKALNA ODPOWIEDNIOŚĆ LANGLANDSA I GEOMETRIA

PRZEMYSŁAW CHOJECKI

Program Langlandsa miał swój początek pod koniec lat sześćdziesiątych, gdy Robert Langlands wysłał list do André Weila z hipotezami, które przewidywały, że istnieje odpowiedniość pomiędzy reprezentacjami automorficznymi danej grupy reduktywnej G a skończenie wymiarowymi reprezentacjami L-grupy G. Langlands sformułował też ogólną hipotezę funktorialności, która opisywała jak zachowują się reprezentacje przy zamianie grup po obu stronach odpowiedniości. Sformułowanie tych hipotez miało olbrzymi wpływ na dalszy rozwój teorii liczb, geometrii algebraicznej a także fizyki kwantowej. Idee Langlandsa szybko zaczęły być rozwijane i matematycy zauważyli, że także w innych dziedzinach można mówić o podobnej odpowiedniości. Tak powstał geometryczny program Langlandsa, którego celem jest zrozumienie reprezentacji grupy podstawowej powierzchni Riemanna. Z tych pomysłów korzystał także Witten przy swoich pracach o dualizmie elektromagnetycznym w kontekście programu Langlandsa.

Sam program Langlandsa szybko podzielił się na aspekt lokalny i globalny. Globalna część stara się opisać formy automorficzne, lokalna zaś bada reprezentacje gładkie grup nad ciałami lokalnymi ($\mathbb{Q}_l$, $\mathbb{R}$). W najprostszym przypadku, klasyczna lokalna odpowiedniość Langlandsa przewiduje istnienie bijekcji pomiędzy gładkimi reprezentacjami $\mathrm{GL}_n(F)$ o współczynnikach w E (gdzie $F/\mathbb{Q}_p$, $E/\mathbb{Q}_l$ są skończonymi rozszerzeniami) a ciągłymi reprezentacjami Galois $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$. Istnienie powyższej odpowiedniości z dobrymi własnościami zostało udowodnione w latach 2000-2001 przez Harrisa i Taylora ([HT]) przy założeniu, że $l \neq p$. Metody dowodu były zarówno lokalne jak i globalne (analiza kohomologii przestrzeni Rapoporta-Zinka i rozmaitości Shimury, analiza harmoniczna).

Założenie $l \neq p$ jest tutaj szczególnie ważne z uwagi na topologiczną strukturę ciał lokalnych. Gdy $l = p$ topologia odgrywa znacznie większą rolę. Pojawia się też znacznie więcej reprezentacji po stronie GL_n i po stronie Galois niż w przypadku $l \neq p$. Chęć zrozumienia tej sytuacji zrodziła p-adyczny program Langlandsa, zapoczątkowany przez prace Christophe'a Breuila.

P-adyczny program Langlandsa jest w ostanich latach jedną z silnie rozwijanych dziedzin matematyki. Celem jest skontruowanie bijekcji pomiędzy p-adycznymi lokalnymi reprezentacjami Galois $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(E)$ (gdzie F i E są skończonymi rozszerzeniami $\mathbb{Q}_p$) a pewnymi dopuszczalnymi reprezentacjami Banacha grupy $\mathrm{GL}_n(F)$ o współczynnikach w E. Jest to ważny program, którego dotychczasowe częściowe wyniki już pozwoliły udowodnić wcześniej istniejące hipotezy, które nie były związane

Date: 12.02.2015.

z programem Langlandsa - za przykład niech posłużą twierdzenia o modularności czy hipoteza Breuil-Mezard udowodniona przez Kisina. Innym ważnym przykładem zastosowań jest zrozumienie globalnych reprezentacji Galois. Przypomnijmy, że p-adyczną formę modularną f możemy zdefiniować w przypadku dwuwymiarowym jako p-adyczną granicę klasycznych form modularnych (definicja Katza i Serre'a). Wiemy, że f możemy przyporządkować reprezentacje Galois $\rho_f : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_n(E)$ (zakładamy, że E jest odpowiednio duże). Okazuje się, że aby opisać obcięcie $\rho_{f,p} = \rho_{f|\,\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ trzeba użyć p-adycznej odpowiedniości Langlandsa.

Mimo licznych badań nad p-adycznym programem Langlandsa, dotychczas mamy jedynie pełne zrozumienie przypadku dwuwymiarowego dla $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (dzięki pracom między innymi: Bergera, Breuila, Colmeza, Emertona, Kisina, Paskunasa) - praca [CDP] opisuje najnowsze rezultaty i bibliografię. Colmez dał lokalną konstrukcję odpowiedniości, a Emerton dowiódł, że pojawia się ona w kohomologiach uzupełnionych krzywych modularnych. Zacznę od wyjaśnienia tego ostatniego rezultatu ([Em]), ponieważ jest to punkt wyjścia mojego doktoratu.

Dla zwartej otwartej podgrupy $K \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ zdefiniujmy otwarte krzywe modularne jako rozmaitości zespolone

$$Y(K) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K$$

Przestrzeń $Y(K)$ ma naturalny model nad $\mathbb{Q}$, który także będziemy oznaczać przez $Y(K)$. Ustalmy zwartą otwartą podgrupę K^p grupy $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$. P-adyczna uzupełniona kohomologia Emertona jest zdefiniowana jako

$$\widehat{H}^i(K^p)_E = \left(\varprojlim_s \varinjlim_{K_p} H^i_{et}(Y(K_pK^p), \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$$

gdzie K_p przebiega zwarte otwarte podgrupy $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ a H^i_{et} oznacza étalne grupy kohomologii. Mamy więc naturalne działanie $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ i $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ na $\widehat{H}^i(K^p)_E$.

Niech Σ będzie zbiorem waluacji $\mathbb{Q}$, które zawierają p i wszystkie liczby pierwsze, gdzie K^p nie jest hyperspecjalne. Niech $\mathbb{T}_E = E[T_l, S_l]_{l\notin\Sigma}$ będzie abstrakcyjną algebrą Heckego generowaną przez standardowe operatory Heckego T_l i S_l. Algebra Heckego $\mathbb{T}_E$ działa na $\widehat{H}^i(K^p)_E$. Niech $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(E)$ będzie ciągłą reprezentacją Galois. Powiemy, że ρ jest *pro-modularna* jeśli system Heckego λ algebry $\mathbb{T}_E$ przyporządkowany w standardowy sposób ρ jest taki, że część λ-izotypiczna $\widehat{H}^1(K^p)_E[\lambda]$ kohomologii uzupełnionej jest nie-zerowa. Niech $\rho_p = \rho_{|\,\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ będzie obcięciem pro-modularnej reprezentacji ρ i niech $B(\rho_p)$ będzie dopuszczalną E-reprezentacją Banacha przyporządkowaną ρ_p przez p-adyczną lokalną odpowiedniość Langlandsa. Jednym z głównych rezultatów Emertona z [Em] jest udowodnienie istnienia $G_{\mathbb{Q}}\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-ekwiwariantnej injekcji

$$\rho \otimes_E B(\rho_p) \hookrightarrow \widehat{H}^1(K^p)_E$$

Emerton udowadnia nawet więcej: opisuje niemal zupełnie $\widehat{H}^1(K^p)_E$. My będziemy jednak potrzebować tylko słabej wersji odpowiedniości lokalno-globalnej.

Jedną z konsekwencji powyższego włożenia jest dowód hipotezy Fontaine'a-Mazura dla GL_2 nad $\mathbb{Q}$. Ta hipoteza zakłada, że jeśli ciągła reprezentacja Galois $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(E)$ jest nierozgałęziona prawie wszędzie i ρ_p jest de Rhama, wtedy ρ jest modularna (powstaje jako reprezentacja Galois przyporządkowana klasycznej formie modularnej). Używając powyższej słabej lokalno-globalnej kompatybilności, Emerton dowodzi, że jeśli ρ jest pro-modularna i ρ_p jest de Rhama z różnymi wagami Hodge'a-Tate'a, to ρ jest reprezentacją modularną. Głównym pomysłem dowodu jest fakt, że modularność jest związana z niezerowością pewnych lokalnie algebraicznych wektorów. To stwierdzenie wynika zaś z powyższego włożenia i faktu, że lokalnie algebraiczne wektory $B(\rho_p)$ są niezerowe, gdy ρ_p jest de Rhama z różnymi wagami Hodge'a-Tate'a. Dla GL_2 nad $\mathbb{Q}$ Emerton jest w stanie wydedukować z tej słabszej wersji hipotezy jej pełną wersję, odwołując się do twierdzeń o podnoszeniu modularności i hipotezy Serre'a. W tej pracy będziemy rozważali jedynie słabszą hipotezę, starając się dowieść, że pro-modularna reprezentacja Galois, która jest regularna i de Rhama na waluacjach dzielących p jest modularna. Będziemy nazywać to stwierdzenie pro-modularną hipotezą Fontaine'a-Mazura.

Naszym punktem wyjścia jest słaba lokalno-globalna kompatybilność Emertona ([Em]). W Rozdziale I doktoratu pokazuję ogólny formalizm, który pozwala udowodnić pro-modularną hipotezę Fontaine'a-Mazura dla grup unitarnych $U(n)$ zwartych w nieskończoności przy założeniu istnienia pewnej słabej wersji p-adycznej odpowiedniości Langlandsa dla $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Naturalnym pytaniem jest zapytanie o przykłady, kiedy powyższy formalizm jest spełniony bezwarunkowo. Konstrukcja Breuila-Herziga ([BH]) jest pierwszą udaną konstrukcją w p-adycznym programie Langlandsa, która wychodzi poza GL_2. Breuil i Herzig przyporządkowali górnie trójkątnym reprezentacjom $\rho_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}_n(E)$ dopuszczalne E-reprezentacje Banacha $\Pi(\rho_p)^{ord}$, które są zbudowane z szeregów głównych (ang. principal series - reprezentacje, które powstają przez indukowanie charakterów do G). Hipotetycznie $\Pi(\rho_p)^{ord}$ powinna zawierać informację o części zwykłej pełnej p-adycznej lokalnej odpowiedniości Langlandsa $\Pi(\rho_p)$, jeżeli ona istnieje. Pokażemy, że ta konstrukcja spełnia nasz formalizm. Pod koniec pierwszego rozdziału dowiedziemy pro-modularnej hipotezy Fontaine'a-Mazura dla zwykłych całkowicie nierozkładalnych reprezentacji w przypadku $U(n)$.

Twierdzenie 1. *Niech $z \in X_{K^p}(E)$, gdzie X_{K^p} jest rozmaitością Heckego (ang. eigenvariety) poziomu K^p grupy unitarnej $U(n)$ i niech ρ będzie reprezentacją Galois przyporządkowaną z. Dla każdego $v \mid p$ załóżmy, że*

(1) *ρ_v jest zwykła, de Rhama i regularna;*
(2) *redukcja $\bar{\rho}_v$ jest generyczna i całkowicie nierozkładalna.*

Wtedy z jest punktem modularnym (to znaczy, ρ jest izomorficzna z reprezentacją Galois przyporządkowaną klasycznej reprezentacji automorficznej $U(n)$).

W Rozdziale II (wspólna praca z Johnem Bergdallem) pokazujemy, że konstrukcja Breuila-Herziga pojawia się w kohomologiach uzupełnionych $U(3)$. Niech F/F^+ będzie rozszerzeniem CM ciał liczbowych, w którym p jest całkowicie rozkładalna. Oznaczmy przez $G = U(3)$ grupę unitarną trzech zmiennych zwartą w nieskończoności zdefiniowaną nad F/F^+. Ustalmy zwartą otwartą podgrupę $K^p \subset G(\mathbb{A}_F^{p\infty})$. Możemy zdefiniować grupę kohomologii uzupełnionych Emertona dla tych danych:

$$\widehat{H}^0(K^p)_E = \left(\varprojlim_s \varinjlim_{K_p} H^0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}^\infty)/K_pK^p, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$$

gdzie K_p przebiega zwarte otwarte podgrupy $G(\mathbb{Q}_p)$. Ta przestrzeń może być widziana jako model dla p-adycznych reprezentacji automorficznych $U(3)$.

Jeśli π jest reprezentacją automorficzną $U(3)$ to możemy jej przyporządkować globalną reprezentację Galois $\rho = \rho_\pi : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{GL}_3(E)$ (rozszerzając E jeśli trzeba) dzięki pracy Blasiusa i Rogawskiego w tym przypadku ([Rog]). Jeśli π jest poziomu K^p to ρ_π jest nierozgałęziona poza skończonym zbiorem miejsc zależnych od K^p.

Dla każdego miejsca $v \mid p$ z F^+ mamy $v = \tilde{v}\tilde{v}^c$. Rozważmy lokalną reprezentację Galois $\rho_v := \rho_{\tilde{v}} : \mathrm{Gal}(\overline{F}_{\tilde{v}}/F_{\tilde{v}}) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{GL}_3(E)$. Jeśli $\rho_{\tilde{v}}$ jest generyczna i zwykła (pojęcia zdefiniowane są w Rozdziale II) to także $\rho_{\tilde{v}^c}$ jest taka i $\Pi(\rho_{\tilde{v}})^{\mathrm{ord}}$ zależy tylko od $v \mid p$ w F^+, gdzie $\Pi(\rho_{\tilde{v}})^{\mathrm{ord}}$ jest reprezentacją $\mathrm{GL}_3(F_{\tilde{v}})$ przyporządkowaną $\rho_{\tilde{v}}$ przez [BH]. Będziemy więc oznaczali ją przez $\Pi(\rho_v)^{\mathrm{ord}}$. Następne twierdzenie jest głównym rezultatem tego rozdziału. Jest to słaba wersja w przypadku $U(3)$ hipotezy 4.2.2 z [BH].

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że dla wszytkich $v \mid p$, ρ_v jest generyczna zwykła i całkowicie nierozkładalna. Wtedy istnieje domknięte włożenie*

$$\widehat{\bigotimes_{v|p}} \Pi(\rho_v)^{\mathrm{ord}} \hookrightarrow \widehat{H}^0(K^p)_E.$$

Podkreślmy, że ρ jest z założenia modularna w powyższym twierdzeniu.

Metody, których używamy w dowodzie twierdzenia, mogą być ważne same z siebie. Mianowicie, ustalamy odpowiedniość pomiędzy udoskonaleniami (ang. refinements) klasycznych punktów na rozmaitości Heckego dla $U(3)$ a pewnymi szeregami głównymi. Pozwala nam to uzyskać wynik dzięki użyciu formuły sprzężoności (ang. adjunction formula) dla funktora Emertona-Jacqueta. Zauważmy, że nasze metody powinny dać się uogólnić do $U(n)$ i to jest przedmiot naszych obecnych badań. Nasze podejście jest naturalnym uogólnieniem [BE].

Poszukiwanie sposóbu uogólnienia p-adycznej lokalnej odpowiedniości Langlandsa, zaprowadziło nas do metod geometrycznych. Klasyczna lokalna odpowiedniość Langlandsa została udowodniona prze Harrisa i Taylora ([HT]) dzięki użyciu metod geometrycznych. Użyli oni obiektów globalnych (rozmaitości Shimury) jak i lokalnych (przestrzenie Rapoporta-Zinka) do ustalenia odpowiedniości. Jest więc naturalne, by starać się użyć ich podejścia także w przypadku p-adycznym. Niektóre metody nie dają się już stosować (analiza harmoniczna), ale za to pojawia się wiele nowych, czysto p-adycznych, fenomenów. Zaczęliśmy ten autoreferat od przywołania rezultatów Emertona, które konstytuują globalną geometryczną część p-adycznego programu Langlandsa. W rozdziałach III i IV badamy lokalne obiekty geometryczne, dostając rezultaty podobne do tych Emertona.

Rozdział III skupia się na kohomologii mod p wieży Lubina-Tate'a. Naszymi głównymi rezultatami są

(1) W pierwszej grupie kohomologii étalnych $H^1_{LT,\bar{\mathbb{F}}_p}$ wieży Lubina-Tate'a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pojawia się lokalna odpowiedniość Langlandsa mod p i naiwna odpowiedniość Jacqueta-Langlandsa mod p. Rozumiemy przez to istnienie injekcji:

$$\pi \otimes \bar{\rho} \hookrightarrow H^1_{LT,\bar{\mathbb{F}}_p}$$

i fakt, że $\sigma \otimes \pi \otimes \bar{\rho}$ pojawia się jako podiloraz (ang. subquotient) w $H^1_{LT,\bar{\mathbb{F}}_p}$, gdzie π jest supersingularną reprezentacją $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\bar{\rho}$ jest jej przyporządkowaną lokalną mod p reprezentacją Galois a σ pochodzi od naiwnej odpowiedniości Jacqueta-Langlandsa mod p (definicja jest dana w Rozdziale III).

(2) Pierwsza grupa kohomologii étalnych $H^1_{LT,c,\bar{\mathbb{F}}_p}$ o zwartych nośnikach wieży Lubina-Tate'a nie zawiera w sobie żadnych reprezentacji supersingularnych. Ten zaskakujący rezultat pokazuje, że sytuacja mod p jest zupełnie inna od swojego odpowiednika mod l. Pozwala też pokazać, że lokalna odpowiedniość Langlandsa mod p pojawia się w H^1 miejsca zwykłego krzywych modularnych (ang. ordinary locus). To także jest różne od sytuacji l-adycznej dla reprezentacji superkuspidalnych.

Te rezultaty, szczególnie (1), uzyskujemy przez porównanie krzywych modularnych z ich miejscem supersingularnym (ang. supersingular locus), które jest wielokrotną sumą wież Lubina-Tate'a. Pracujemy na poziomie analizy sztywnej (ang. rigid analysis) z przestrzeniami Berkovicha.

W Rozdziale IV badamy p-adyczne kohomologie uzupełnione wieży Lubina-Tate'a. Nasze główne rezultaty są podobne do wzmiankowanych wyżej. Tym razem pracujemy jednak z przestrzeniami adycznymi zamiast z przestrzeniami Berkovicha. Pozwala nam to na zajmowanie się bezpośrednio krzywymi modularnymi nieskończonego poziomu, które są przestrzeniami perfektoidalnymi (praca Scholze [Sch]). To podejście wydaje się bardziej naturalnym konceptualnie. Jednym z naszych głównych wyników jest:

Twierdzenie 3. *Niech $\rho : G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(E)$ będzie pro-modularną reprezentacją Galois (to znaczy, przyporządkowaną pewnemu p-adycznemu systemowi Heckego występującemu w kohomologiach uzupełnionych). Załóżmy, że $\bar{\rho}_p = \bar{\rho}_{|G_{\mathbb{Q}_p}}$ jest całkowicie nierozkładalna. Wtedy istnieje $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times G_{\mathbb{Q}_p}$-ekwiwariantna injekcja*

$$B(\rho_p) \otimes_E \rho_p \hookrightarrow H^1(\mathcal{M}_{LT,\infty}, E)$$

gdzie $B(\rho_p)$ jest p-adyczną reprezentacją Banacha $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ przyporządkowaną ρ_p przez p-adyczną lokalną odpowiedniość Langlandsa a $\mathcal{M}_{LT,\infty}$ jest wieżą Lubina-Tate'a w *nieskończoności związaną z* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *(właściwie, przestrzenią Rapoporta-Zinka w nieskończoności).*

Wyniki uzyskane w tym doktoracie stanowią podstawę do dalszych badań w p-adycznym programie Langlandsa.

Bibliografia

[BH] C. Breuil, F. Herzig, “Ordinary representations of $G(\mathbf{Q}_p)$ and fundamental algebraic representations", to appear in Duke Math. J. (2014).

[BE] C. Breuil, M. Emerton, “Representations p-adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et compatibilite local-global", Asterisque 331 (2010) 255-315.

[CDP] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paskunas, “The p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$", preprint (2013).

[Em] M. Emerton, “Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$", preprint (2011).

[HT] M. Harris, R. Taylor, "The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties", Annals of Math. Studies 151, PUP 2001.

[Rog] J. Rogawski, “Automorphic representations of unitary groups in three variables”, *Annals of Mathematics Studies* (1990), vol 123, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[Sch] P. Scholze, "‘On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties"’, preprint (2013).

E-mail address: `p.chojecki@mimuw.edu.pl`