Deformations de modules formels :

$\mathcal{O}$ anneau des entier d'un corps local non-archimedeen ; $\hat{\mathcal{O}}^{nr}$.

$\mathcal{C} = \{ \hat{\mathcal{O}}^{nr}$-algebres locales completes de corps res. $\hat{\mathcal{O}}^{nr}/(\pi) \}$

G $\mathcal{O}$-module formel sur $\hat{\mathcal{O}}^{nr}/(\pi)$, $R \in \mathcal{C}$. (G de dimension 1)

Deformation de G_0 à R = $\mathcal{O}$-mod. formel G sur R t.q. la reduction de G mod. l'ideal max m de R est G_0.

Prop. G_0 $\mathcal{O}$-module formel sur $\hat{\mathcal{O}}^{nr}/(\pi)$ de hauteur $h < \infty$.

$\mathcal{C} \ni R \longmapsto \{ \text{defo. de } G_0 \text{ à } R \}/\text{iso}$.

Ce foncteur est representable par $\hat{\mathcal{O}}^{nr}[[t_1, \dots, t_{h-1}]] = A_0$

thm. de Schlessinger. k parfait, F : * Mayer-Vietoris : $F(A \times_C B) = F(A) \times_{F(C)} F(B)$

* formellement lisse : $A \twoheadrightarrow B \Rightarrow F(A) \to F(B)$

* $TF(k) := F(k[T]/T^2)$ de dim $d < \infty$

$\Rightarrow F$ rep. par $W(k)[[t_1, \dots, t_d]]$.

Structure de niveau :

Def. Structure de niveau n de Drinfeld ; G $\mathcal{O}$-mod. formel $/R$ de hauteur h

$$\phi : (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h \longrightarrow G[\pi^n](R) \quad \text{t.q.} \prod_{x \in (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h} (T - \phi(x)) \mid [\pi]_G .$$

defo. de niveau n à $R \in \mathcal{C}$ = defo de G_0 à R avec str. de niveau n de Drinfeld.

le foncteur $R \in \mathcal{C} \longmapsto \{ \text{défo. de niveau } n \text{ de } G_0 \text{ à } R \}/\text{iso}$.

est representable par A_n :

1) A_n est regulier ; e_i $:= 1, \dots, h$ base standard de $(\frac{1}{\pi^n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ comme $(\frac{1}{\pi^n}\mathcal{O}/\mathcal{O})$-mod. images des e_i dans A_n forment un syst. local des parametres de A_n.

2) $\forall_{n \le m}$ $A_n \to A_m$ fini et plat.

$K = \mathbb{F}_q((\pi))$, k corps parfait contenant $\mathbb{F}_q$, $k = \bar{k}$, $L = K \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k = k((\pi))$.

G_0 $\mathcal{O}_K$-module formel sur k (de dim 1) de hauteur n.

$\rightsquigarrow$ $A_0, A_1, \dots, A_m, \dots$, G^{univ}/A_0 $\forall_m$ $X_1^{(m)}, \dots, X_n^{(m)}$ base de Drinfeld univ. de $G^{univ}[\pi^m]/A_m$

$$\Rightarrow A_m = k[[X_1^{(m)}, \dots, X_n^{(m)}]]$$

I = id. max de A_1, $I = (X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)})$

On notera aussi I l'ideal engendré par I dans A_m $\forall_m$.

$A_\infty = \varinjlim A_m$, $\hat{A}$ complétion I-adique A_∞. <u>But</u> : décrire $\mathcal{M}_{G_0} = \mathrm{Spf}(A)$ en termes de K-e.v. formels. $\mathcal{M}_{G_0}$ est une sous-espace de $\tilde{G}^n$ (G relev. de G_0) "découpé" par un condition de déterminant.

<u>Prop.</u> $A/_I \cong k[X_1^{1/q^\infty}, \dots, X_n^{1/q^\infty}]/_{(X_1,\dots,X_n)}$ (on a clairement $\hat{A}/_I = \varinjlim A_m/_I$)

<u>lemme</u> : $A_m/_I = k[X_1^{(m)}, \dots, X_n^{(m)}]/_{(X_1^{(m)},\dots,X_n^{(m)})^{[q^{(m-1)n}]}}$

<u>notation</u> : J idéal, $J^{[d]}$ idéal engendré par les puissances d-ième des elts de J.

<u>preuve</u> : $R \in \mathcal{C}$; se donner $A_m \to R \iff G$ défo de G_0 à R
(lemme) et base de Dr. de $G[\pi^n](R)$ (base $x_1, \dots, x_n$).

Une tel morphisme se factorise par $A_m/_I \iff \pi = 0$ dans R
$G = G_0 \otimes_k R$
et $x_i \in G[\pi^{m-1}](R)$ $\forall i$

Si on suppose $\pi = 0$ ds R et $x_1, \dots, x_n \in G_0[\pi^{m-1}](R)$ quelconques.
Alors les $(x_i)_{1\le i\le n}$ forment une base de Dr. de $G_0[\pi^m](R)$
$A_m/_I$: $\forall R \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}(A_m/_I, R) \iff (x_1, \dots, x_n) \in G_0[\pi^{m-1}](R)$ $\square$

<u>preuve</u> (prop.) : $\mathrm{Hom}(A/_I, R) = \varprojlim \mathrm{Hom}(A_m/_I, R) \iff$ elts de $\varprojlim G(R)$ dont la projection sur le premier coord. est 0.
$\iff$ elts de $\varprojlim_{\pi} N_i(R)$

$\square$

Si <u>G_0 est de hauter 1</u>. $A = \mathcal{O}_L$, G défo. de G_0 à $\mathcal{O}_L$
$R \in \mathcal{C}$; base de Dr. pour $G[\pi](R) \iff \lambda_1 \in$ id. max de R
$T^q - \lambda^{q-1} T$ divisible par $[\pi]_G(T) = T\phi(T)$ — unité fois polynome irr. de $\mathcal{O}_L[T]$.
λ_1 racine de ϕ , λ_m racine de $\phi_m(T) = \phi([\pi^{m-1}]_G(T))$

<u>On a</u> : $A_m = \mathcal{O}_L[T]/\phi_m(T)$ = anneau des ent de l'ext. $L_m/_L$ en ajoutant à L la π^m-torsion de G_0.
$\Rightarrow \mathcal{M}_{G_0} = \mathrm{Spf}(\hat{\mathcal{O}}_{L_\infty})$

Soit $R \in \mathrm{Nilp}_{O_L}$, un elt de $\varprojlim G[\pi^n](R)$ defini un elt de $\widehat{G}(R)$.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}(G_0) \longrightarrow \widetilde{G} \quad / \mathrm{Spf}\, O_L$$

ici: $O_L[[t^{1/q^\infty}]] \longrightarrow O_{\widehat{L}_\infty}$

Prop. $O_{\widehat{L}_\infty}^\flat \cong k[[t^{1/q^\infty}]]$

Determinants de modules tronqués : cas general G_0 de hauteur n.

Prop. $\exists$ O_K-mod. formel ΛG_0 de dim 1 de hauteur 1 t.q. $\forall m \geq 1$ $(\Lambda G_0)[\pi^m]$ = puissance ext. de $G_0[\pi^m]$.

(1) En d'autres termes, la categorie des applications O_K-lin. alternées de schemas en O_K-mod. de source $G_0[\pi^m]$ admet un objet initial

$$\mu_{m,0} : G_0[\pi^m]^n \longrightarrow (\Lambda G_0)[\pi^m] \quad \text{compatibles :}$$

$$\pi \mu_{m,0}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{m-1,0}(\pi x_1, \dots, \pi x_n).$$

(2) $k = \bar{k}$, $R \in \mathcal{C}$. G defo. de G_0 à R. La famille $(\mu_{m,0})_m$ se releve à une famille d'app. O_K-lin. alt. $\mu_m : G[\pi^m] \longrightarrow (\Lambda G)[\pi^m]$ avec ΛG l'unique defo de ΛG_0 à R.

De plus, si $x_1, \dots, x_n$ base de Dr. de $G[\pi^m](R) \Rightarrow \mu_m(x_1, \dots, x_n)$ base de Dr de $\Lambda G[\pi^m](R)$.

(these de H. Hadayatzadeh)

$$\mu : \varprojlim G[\pi^m]^n \longrightarrow \varprojlim \Lambda G[\pi^m] \rightsquigarrow \otimes K \rightsquigarrow \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{\Lambda G}.$$

en fait $\Lambda \widetilde{G} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Lambda G}$ par l'universalité ($\exists$ iso. de K-e.v. formels t.q.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G}^n \arrow[r, "\mathcal{J}"] \arrow[dr, "\mu"'] & \Lambda\widetilde{G} \arrow[d, "\wr"] \\ & \widetilde{\Lambda G} \end{tikzcd}$$

est commutative.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{G_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_{\Lambda G_0} \arrow[d] \\ \widetilde{G}^n \arrow[r, "\mathcal{J}"'] & \Lambda\widetilde{G} \end{tikzcd}$$

est un carré commutatif

Thm. Le carré est cartesien : $\underset{\mathrm{Spf}\, A}{\mathcal{M}_{G_0}} = \overbrace{\widetilde{G}^n \times_{\Lambda\widetilde{G}} \mathcal{M}_{\Lambda G_0}}^{\mathrm{Spf}\, B}$

3 étapes : ① A parfait ② Frob est surjectif sur B

③ $\exists$ ideal de def. J de B t.q. $A/I = B/J$

Admettons ça :

$$\begin{tikzcd} B/J \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "T^m"] & A/I \arrow[d, "\wr"] \\ B/J^{[q^m]} \arrow[r] & A/I^{[q^m]} \end{tikzcd} \Rightarrow \text{iso } \forall m \quad \square$$

(1.) $X_i^{(1)} = [\pi^{m-1}]_{G^{univ}}(X_i^{(m)}) \xrightarrow{e} G^{univ}[\pi^{m-1}]/A_{m-1}$.

$Y_i = \lim_{m\to\infty} [\pi^{m-1}]_{G_0}(X_i^{(m)}) \in A$; $[\pi]_{G_0} \equiv [\pi]_{G^{univ}} \mod I$

car $G^{univ} \otimes_{A_1} A_1/I = G_0$.

$\Rightarrow [\pi^{m-1}]_{G_0}(X_i^{(m)}) \equiv X_i^{(1)} \mod I$ $\Rightarrow Y_i \in I$

$\forall m \gg 0$ $Y_i - [\pi^{m-1}]_{G_0}(X_i^{(m)}) \in I^2$; on veut $X_i^{(1)} \underset{\mod I^2}{\equiv} [\pi^{m-1}]_{G^{univ}}(X_i^{(m)})$

donc on veut $[\pi]_{G^{univ}} \equiv [\pi]_{G_0} \mod I^2$. (lemme 4.6.1)

ça donnerait $X_i^{(1)} - [\pi^{m-1}]_{G_0}(X_i^{(m)}) \in I^2 \Rightarrow X_i^{(1)} - Y_i \in I^2$.

Posons J = id. engendré par les $Y_i \subset I$. , $I \subset J + I^2$.

On répète l'argument $\Rightarrow$ (I fermé) , $I \subset J \Rightarrow I = J$.

$(\pi^{m-1})_{G_0}$ serie ds $k[[T^{q^m}]]$ $\rightsquigarrow Y_i^{1/q^m} \in A \Rightarrow$ (1.).

(2.) ok , $B = O_L[[X_1^{1/q^\infty}, \dots, X_n^{1/q^\infty}]] \otimes_{O_L[[X^{1/q^\infty}]]} O_{C_\infty}$

(3.) <u>$B/J \cong A/I$</u> :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{G_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_{\wedge G_0} \arrow[d] \\ \tilde{G}^n \arrow[r, "\delta"] & \wedge \tilde{G} \end{tikzcd}$$

Hom$(B,R) \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in \tilde{G}^n(R)$ t.q. $\delta(x_1,\dots,x_n)^{(m)}$ est une base de Dr pour $\wedge G[\pi^m](R)$

$\Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in \tilde{G}^n(R)$: $\delta(x_1,\dots,x_n)^{(1)}$ ~~[illegible]~~ — " — $\wedge G[\pi](R)$

Hom$(A/I, R) \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in \varprojlim G_0(R)$ t.q. $x_i^{(1)} = 0$ $\forall i$.

Donc, define $J \subset B$ t.q. $\pi = 0$, $X_i^{(1)} = 0$ $\forall i$ de sorte que

Hom$(B/J, R) \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in \tilde{G}^n(R)$ t.q. $x_i^{(1)} = 0$, $\delta(x_1,\dots,x_n)^{(1)}$ base de Dr.

on veut montrer que la cond. $\delta(x_1,\dots,x_n)^{(1)}$ base de Dr est superflue

<u>Mais</u> : $\delta(x_1,\dots,x_n)^{(1)} = \mu_1(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)}) = 0$, donc il faut voir que 0 base Drinfeld de $\wedge G[\pi](R)$ $\forall_{k\text{-alg}} R$.

$\Rightarrow B/J \cong A/I$ □

<u>lemme 6.0.1.</u> $\mathcal{M}_{G_0} = \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{M}^{ad}$, $\eta = \mathrm{Spa}(\tilde{K}_{ab}, O_{\tilde{K}_{ab}})$ perfectoid

$\Rightarrow \mathcal{M}^{ad}_\eta$ est perfectoïde. □