GDT J.M. Fontaine

F corps alg. clos, char. $p>0$, complet pour ~~la~~ une val. non-triv. $|\cdot|$.

$D^* = \{\lambda\in F \mid 0<|\lambda|<1\}$, B = anneau des fonctions anal. sur D^*
$= \{\sum a_n z^n \mid a_n\in F,\ |a_n|\rho^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \forall_{\rho\in]0,1[}\}$

B est un F-alg. de Frechet parce que $B = \varprojlim_{I\in\mathcal{Y}} B_I$, $\mathcal{Y}$ interv. fermés nonvides de $]0,1[$

et où B_I = fonction anal. sur $D_I = \{\lambda\in F \mid |\lambda|\in I\}$ – c'est une alg. de Banach

En plus, B_I est un anneau principal.

$$D_I \longmapsto \{\text{id. max de } B_I\}$$
$$\lambda\in D_I \longmapsto (z-\lambda)\quad\text{, avec cor. residuel } F.$$

q = puissance de p ; $\varphi(\sum a_n z^n) = \sum a_n^q z^n$. , $\varphi \circlearrowright D^*$: $\varphi(\lambda)=\lambda^q$.

On a envie de regarder $X = \text{"}D^*/\varphi^{\mathbb{Z}}\text{"} = \operatorname{Proj} P$

où $P = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} P_d$, $P_d = \{b\in B \mid \varphi(b) = b^d\}$

on a $|X| = D^*/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

Par ça, on peut interpreter les travaux de Hartl et Pink (sur φ-modules sur D^*)

$H^0(X,\mathcal{O}_X) = \{b\in B \mid \varphi b = b\} = E = \mathbb{F}_q((z))$

on veut le faire en caracteristique mixte.

Pour x pt fermé de X $\rightsquigarrow$ $k(x)\cong F$.

Aussi : B_I est un E-algebre et B est un E-alg. de Frechet

donc il y a deux corps (E,F) qui interviennent.

---

p, corps ultrametrique = corps E complet pour une val. non-triv. nonarch. $|\cdot|$, à corps res. parfait k_E.

norme sur un anneau A = $|\cdot|: A\to\mathbb{R}_{\geq 0}$:
$|a|=0 \Leftrightarrow a=0$
$|1|=1$
$|a+b|\leq \max\{|a|,|b|\}$
et $|ab|\leq|a||b|$.

anneau de Banach : anneau commutatif
muni d'une classe d'equivalence de normes, complet pour la top. induite et admettant une pseudo-uniformisante (= elt. top. nilpotent inversible)

$A \supset \mathcal{A}$ = sous-anneau ouvert borné, π = p. unif. $\in\mathcal{A}$. $\rightsquigarrow A = \mathcal{A}[\frac{1}{\pi}]$
et $\mathcal{A} = \varprojlim \mathcal{A}/\pi^n\mathcal{A}$

$A^\circ = \{a \in A \mid \{a^n\}_n \text{ est borné}\}$.

<u>Anneau spectral</u> est un anneau de Banach tq. A° est borné.

$\Leftrightarrow$ une norme adm. qui est mult. pour les puissances.
equiv.

<u>Un anneau perfectoïde</u> = anneau spectral t.q. $\exists$ ps. unif. π qui est une puissance p-ième t.q. $A^\circ/\pi A^\circ$ est de car. p avec $x \mapsto x^p$ <u>surjectif</u>.

<u>corps perfectoïde</u> := corps ultrametrique qui est un anneau perfectoïde.

A = anneau spectral de car p. Alors A est perfectoïde $\Leftrightarrow$ A est perfait.

<u>Dans ce cas:</u> π = p. unif. de A ; $\widehat{\mathbb{F}_p((\pi))^{rad}}$ = corps perfectoïde contenu ds A.

A ann. perfectoïde $\rightsquigarrow$ $R(A) = A^\flat$ = ann. perf. de car. p.

où $A^\flat = \{a = (a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \mid a^{(n)} \in A,\ (a^{(n+1)})^p = a^{(n)}\}$

$(a+b)^{(n)} = \lim_{m \to \infty} (a^{(n+m)} + b^{(n+m)})^{p^m}$.

On pose $|a|^\flat = |a^{(0)}|$.

<u>Soit:</u>

E = corps ultrametrique locale, $R = k_E$-alg. perfait, $W_{O_E}(R)$:= O_E-alg. complete pour la top. π-ad., sans π-tors. où π = p. unif. de E.

On note $O_E = E^\circ$, $m_E = E^{\circ\circ}$

Et [red. de $W_{O_E}(R)$ mod m_E] = R

On peut la definir par $W_{O_E}(R) = O_E \hat{\otimes}_{W(k_E)} W(R)$ $\quad (\pi = \pi \hat{\otimes} 1)$

$\downarrow$ section multiplicative $a \mapsto [a] = 1 \otimes (a, 0, \dots)$

R

Si E est de car p $\Rightarrow$ $W_{O_E}(R) \cong O_E \hat{\otimes}_{k_E} R$

Suppose que la val. de E est discrete. On regarde

$\{E\text{-alg. perfectoïdes}\}$ et $\{$"E-pairs perfectoïdes" : (R, I) où $R = k_E$-alg. perfectoïde, I = ideal de $W_{O_E}(R^\circ)$ principal, engendré par un element de la forme $[c_0] + \pi\eta$ avec c_0 = p. unif de R, η = unité ds $W_{O_E}(R^\circ)\}$

il y a une equivalence des cat.!

<u>on construit l'équiv. explicitement:</u>

(R, I) = E paire $\rightsquigarrow$ $(R, I)^\#_E = A$ où $A^\circ = W_{O_E}(R^\circ)/I$

et $A = A^\circ[\frac{1}{\pi}]$

l'autre sense:

$A = E$-alg. perf. $\rightsquigarrow A^{\flat,\circ} = (A^\flat)^\circ \rightsquigarrow \theta_A : W_{O_E}(A^{\flat,\circ}) \to A^\circ$

$$\theta_A\left(\sum_n^\infty [a_n]\pi^n\right) = \sum_{n=0}^\infty a_n^{(0)}\pi^n .$$

et donc ~~on~~ on a: $A \longmapsto (A^\flat, \ker\theta_A)$

En outre: A est un corps perfectoide $\Leftrightarrow A^\flat$ est. c. perf.

Maintenant: soit K corps perfectoide.

on a: K-alg perf. $\longmapsto K^\flat$-alg. perf. $(A \longmapsto A^\flat)$

est une equiv. de categories, parce que: $(\xi) = \ker\theta_K$

$R = K^\flat$-alg. perf. $\longmapsto (R, (\xi_1))$

Ça explique plus facilement la construction de Scholze.

Soit E corps ultrametrique, R k_E-alg. perfectoide, π = p.unif. de E, ϖ = p.unif. de R

Soit $B^\flat = B^\flat_E(R) := W_{O_E}(R^\circ)\left[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi]}\right]$ (si $a \in E$, $x \in R$, $a[x] \in B^\flat$)

on a "ecriture"

$B^\flat \ni f = \sum_{n=0}^\infty a_n[x_n]$, $a_n \in E$, $a_n \to 0$, $x_n \in R$ bornés.

q = ~~elt de~~ nombre réel >1, v_π = val. de E normalisé par $v_\pi(\pi) = 1$.

$\exists$ une unique application $v_\varpi : R \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ t.q. $v_\varpi(\varpi^n) = n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

et $|x|_\varpi = q^{-v_\varpi(x)}$ est une norme adm. mult.

$\rho \in]0,1[$, $\rho = q^{-r}$, $r > 0$; $|f|_\rho = q^{-v_r(f)}$ où $v_r(f) = \min_{n\in\mathbb{N}}\{v_\varpi(x_n) + r v_\pi(a_n)\}$

parce que on veut: $|f| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|_R\,|a_n|_E\}$.

Soit $B = B_E(R)$ = completé de $B^\flat$ par les $|\cdot|_\rho$ avec $\rho \in]0,1[$,

B est un E-alg. de Frechet $= \varprojlim B_I$

où $B_I = B_{E,I}(R)$ = completé pour les $|\cdot|_\rho$ avec $\rho \in I$. = E-alg. spectrale.

Si k_E est un corps fini à q elts avec $\varphi(\sum a_n[x_n]) = \sum a_n[x_n^q]$.

aut. de $B^\flat \rightsquigarrow$ s'étend à B.

On peut considérer $X_{\pi,E}(R) = \mathrm{Proj}\, P$, $P = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} P_d$

avec $P_d = \{b \in B \mid \varphi b = \pi^d b\}$

Si la valuation de E est discret et $R = F$ est un corps, alors

$X_{\pi,E}(F)$ est une "courbe" = schéma separé, integré, noetherien, régulier de dim 1.

pose $X = X_{\pi,E}(R)$.

~~~~ Suppose F alg. clos ; si car. $E = p$ $\begin{cases} D_I \leftrightarrow \text{id. max. de } B_I \\ D^* \leftrightarrow \text{id. max. } \underline{\text{fermés}} \text{ de } B \end{cases}$

<u>Donc</u> : $D^*/\varphi^{\mathbb{Z}} \leftrightarrow$ pts. fermés de $X = X_E(F)$.

on a $D_I \overset{\text{surj.}}{\underset{\text{par inj.}}{\twoheadrightarrow}}$ id. max $\overset{\text{fermés}}{\text{de}}$ B_I

$|\lambda| \in D_I \rightsquigarrow (\pi - [\lambda]) =$ id. max de $B_I = y \rightsquigarrow k(y) = B_I/(\pi - [\lambda])$

On regarde $W_{O_E}(O_F)/(\pi - [\lambda])$, ~~on~~ $\overset{\text{on a}}{}$ E-paire $(F, (\pi - [\lambda]))$

On voit ~~que~~ $k(y)$ est un corps perfectoïde et $k(y)^\flat = F$.

On ~~demande~~ ~~quand~~ $(\pi - [\lambda]) \overset{?}{=} (\pi - [\mu])$

$k(y)^\flat \underset{\text{can.}}{\cong} F$; $\Rightarrow k(y) =$ ~~corps~~ corps alg. clos contenant $E \supset \mathbb{Q}_p$

$\lambda \in F = k(y)^\flat$; $y = (\pi - [\lambda]) \rightsquigarrow \mu \in F$ t.q. $\mu^{(0)} = \pi = \lambda^{(0)}$

$\Rightarrow$ ~~xx~~ $\mu = \lambda \varepsilon$ avec $\varepsilon \in k(y)^\flat$ et $\varepsilon^{(0)} = 1$ i.e. $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p(1)_y$ dépend de y !

$\int$ plong. continue F

<u>Thm facile</u> : Si K est un corps perfectoïde, alors $B_{K,I}(R)$ est une algèbre perfectoïde

et donc on a en plus $B_{K,I}(R)^\flat = B_{K^\flat,I}(R)$.

Soit maintenant $E \subset K$ corps ultramétrique ; $B_{K,I}(R) = K \hat{\otimes}_E B_{E,I}(R)$

Soit E corps complet pour une val. discrète, π = unif. de E. (~~*~~ i.e. complété de $O_K \hat{\otimes}_{O_E} B^\circ_{E,I}(R)$ avec π inversé)

E_∞ = extension APF non finie, $E_\infty = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ avec $E_{n+1} = E_n(\pi_n)$.

Deux cas
① $\pi_0 = \pi$ et $\pi_{n+1}^p = \pi_n$ (modules de Breuil-Kisin)
② $[E:\mathbb{Q}_p] < +\infty$, $\pi_0 = 0$, $\pi_1 \neq 0$, $\pi_{n+1}^q - \pi\, \pi_{n+1} = \pi_n$ (ext. de Lubin-Tate)

Soit $K = \hat{E}_\infty$ - corps perfectoïde ; $\underline{\pi} = (\underline{\pi}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in K^\flat$

<u>Cas ①</u> $\underline{\pi}^{(n)} = \pi_n$ <u>cas ②</u> $\underline{\pi}^{(n)} = \lim_{m \to \infty} \pi_m^{q^m/p^n}$.

On a $\underline{E} := k_E((\underline{\pi}))$ - corps de normes de E_∞/E.

On a $\underline{E} \subset K^\flat$ et donc $\hat{\underline{E}}^{rad} = K^\flat$
~~~~

GDT. J.M. Fontaine ③.

On a : $\begin{matrix} K & K^b \\ | & | \\ E & \underline{E} \end{matrix}$ pour $? = E, \underline{E}, K, K^b$ on peut regarder $B_{?,I}(R)$ ← n'importe quelle

Maintenant : on regarde $Spa(B_{?,I}(R), B^0_{?,I}(R))$.

⇝ c'est un espace adique (prefaisceau $\mathcal{O}_X$ = faisceau) si $? = K$ ou K^b (par Scholze)

On peut prendre $\varinjlim_I Spa(\dots)$ et obtenir un espace adique.

on peut prendre $\dots/\varphi^{\mathbb{Z}}$ et obtenir une version adique de $X = \mathrm{Proj}\, P$.

$R = F$ = corps ~~..~~ alg. clos.

On pose : $Spa(B_{K^b,I}, B^0_{K^b,I}) = Y^{ad}_{K^b}$ et pareil pour $? = \dots$

on a $|Y^{ad}_K| = |Y^{ad}_{K^b}|$

$$\begin{matrix} |Y^{ad}_K| & = & |Y^{ad}_{K^b}| \\ \downarrow & & \downarrow = \\ |Y^{ad}_E| & & |Y_{\underline{E}}| \end{matrix}$$
← (parce que c'est revetement radiciel)

$|Y^{ad}_E| = \{\text{id. max. fermés de } B\} \amalg \{``(0, k(y)^+)"\}$ où $y = (p_y, k(y)^+)$

on obtient une rel. d'équivalence.

$\Rightarrow |X_E(F)| = |X_{\underline{E}}(F)|/\sim$ alors en car. p on a $X_{\underline{E}}(F) = D^*/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

alors $|X_E(F)| = (D^*/\varphi^{\mathbb{Z}})/\sim$

id. max. fermés de $B_{\underline{E}}(F) \Leftrightarrow D^*$. Si on prend la construction ②

$D^* = m_F \setminus \{0\}$; G = gr. formel de Lubin-Tate corr. à π

$G(\mathcal{O}_F) = m_F = \mathcal{O}_E$-module (mult. par p = Frobenius)

et en fait c'est un E-esp. vect. (p invers.)

Le groupe E^* opère sur D^*.

$\left\{\begin{matrix}\text{ideaux max.}\\ \text{fermés de } B\end{matrix}\right\} \hookrightarrow D^*/\mathcal{O}_E^*$; $\{\text{points fermés de } X\} \hookrightarrow D^*/E^*$