B. Schraen GDT "Presque mathématique" (1.)

Introduction : Tate (1966) : $K/\mathbb{Q}_p$ finie, $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$

$$G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}_p^*, \quad H^i_{cont}(G_K, \mathbb{C}_p(\chi^j))$$

$\overline{K}$ | K_∞) $\mathbb{Z}_p$ tot. ramifiée | K

fait : L/K_∞ finie $\quad \mathfrak{m}_{K_\infty} \subset \mathrm{Tr}_{L/K_\infty}(\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_{K_\infty}$

"c'est une extension "presque étale"."

$$H^i_{cont}(G_{K_\infty}, \mathbb{C}_p(\chi^j)) \cong H^i_{cont}(G_{K_\infty}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}(\chi^j))[\tfrac{1}{p}]$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p^r$$

$$0 \to R^1\varprojlim H^i(G_{K_\infty}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p^r(\chi^j)) \to H^i(G_{K_\infty}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}(\chi^j)) \to \varprojlim H^i(G_{K_\infty}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p^r(\chi^j)) \to 0$$

$$H^i(G_{K_\infty}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p^r(\chi^j)) = \varinjlim_{L/K_\infty} H^i(\mathrm{Gal}(L/K_\infty), \underbrace{\mathcal{O}_L/p^m(\chi^j)}_{= M})$$

$$\underbrace{\hat{H}^0(\mathrm{Gal}(L/K_\infty), \mathbb{Z})}_{= \mathcal{O}_{K_\infty}/\mathrm{Tr}(\mathcal{O}_L)} \otimes H^i(\mathrm{Gal}(L/K_\infty), M) \to H^i(\mathrm{Gal}(L/K_\infty), M) \quad \text{iso ?}$$

$$\iff \mathfrak{m}_{K_\infty} H^i(G_{K_\infty}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}(\chi^j)) = 0$$

Faltings (~ 88). fait la même chose avec des π_1.

→ notion de presque math.
→ thm de pureté

— Gabber - Ramero (~2000) : généralisation

K corps perfectoïde (complet pour $|\cdot| : K \to \mathbb{R}$, $|K^\times| \subset \mathbb{R}$ dense, et $K^\circ/p \to K^\circ/p$ surjectif), $x \mapsto x^p$

(1.) La catégorie des K^{oa}-modules

$\mathfrak{m} = K^{\circ\circ} \subset K^\circ$ id. max.

$\mathcal{M}_{K^\circ}$ = cat. des K°-modules.

$\cup$

$\mathcal{M}_{K^\circ}[\mathfrak{m}]$ = sous cat. annulés par $\mathfrak{m}$. M t.q. $\mathfrak{m}M = 0$

· $\mathcal{M}_{K^\circ}[\mathfrak{m}]$ est une sous-cat. épaisse, stable par sous-obj., quotient et ext.

$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

$$\mathcal{M}_{K^\circ}/\mathcal{M}_{K^\circ}[\mathfrak{m}] =: \underbrace{\mathcal{M}_{K^{oa}}}_{}$$

cat. abélienne des K^{oa}-modules "almost"

Objets$(\mathcal{M}_{K^{oa}}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{M}_{K^o})$, M, N K^o-module

$$\mathrm{Hom}_{K^{oa}}(M^a, N^a) = \varinjlim_{\substack{M_0 \subset M \\ N_0 \subset N \text{ t.q. } m(M/M_0) = mN_0 = 0}} \mathrm{Hom}_{K^o}(M_0, N/N_0)$$

$$\begin{array}{ccc} M & & N \\ \cup & & \downarrow \\ M_0 & \longrightarrow & N/N_0 \end{array}$$

<u>Remarque</u> : · m est un K^o-module plat donc :

$$0 \to \mathrm{Ker} f \to M \xrightarrow{f} N \to \mathrm{Coker} f \to 0 \qquad f^a \text{ iso} \Leftrightarrow m \otimes f \text{ l'est}$$

$$0 \to m \otimes \ker f \to m \otimes M \to m \otimes N \to m \otimes \mathrm{coker} f \to 0$$

$\Rightarrow$ M, N K^o-module, $\mathrm{Hom}_{K^{oa}}(M^a, N^a) \cong \mathrm{Hom}_{K^a}(m \otimes M, m \otimes N) \cong$

$$\cong \mathrm{Hom}_{K^o}(m \otimes M, N).$$

<u>Produit tensoriel</u> : $\mathcal{M}_{K^{oa}} \times \mathcal{M}_{K^{oa}} \longrightarrow \mathcal{M}_{K^{oa}}$

$M, N \in \mathcal{M}_{K^o}$: $M^a \otimes N^a = (M \otimes N)^a$ vérifie les cond. d'associativité, commute & un neutre.

$(M \otimes N) \otimes L \cong M \otimes (N \otimes L)$, $K^{oa} \otimes M \xrightarrow[\nu_M]{\sim} M$.

$\to$ notion de <u>K^{oa}-algèbre</u> (commutative) : $(A, \mu_A, 1_A)$ où $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{M}_{K^{oa}})$

$\mu_A : A \otimes A \longrightarrow A$ et $1_A : K^{oa} \longrightarrow A$ t.q.

$$K^{oa} \otimes A \xrightarrow{1_A \otimes \mathrm{id}_A} A \otimes A \xrightarrow{\mu_A} A \quad \text{etc...}$$

ν_A (iso..)

<u>Exemple</u> : R une K^o-algèbre et M un R-module $\rightsquigarrow$ R^a une K^{oa}-algèbre. $\rightsquigarrow M^a$ est une R^a-module

<u>Adjoint</u> : (à $M \longmapsto M^a$), $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{M}_{K^{oa}})$, $M_* := \mathrm{Hom}_{K^{oa}}(K^{oa}, M)$.

$\to$ c'est un vrai K^o-module !

<u>Ex.</u> $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{M}_{K^o})$: $(M^a)_* = \mathrm{Hom}_{K^o}(m, M)$

· R une K^o-algèbre ; M un R^a-module, M_* a une structure de R-module.

$\mathrm{Mod}_{R^a} \to \mathrm{Mod}_R$ (parce que $R \to R^a_*$) C'est un adjoint à droite de $M \to M^a$.

$M \longmapsto M_*$

$$\mathrm{Hom}_{R^a}(N^a, M) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, M_*)$$

· $M \in \mathrm{Obj}(\mathcal{M}_{K^{oa}})$, $M_! = m \otimes M_*$ $\longrightarrow$ adjoint à gauche de $M \longmapsto M^a$.

<u>Remarque</u> : $M \longmapsto M_!$ exact mais pas $M \to M_*$.

si $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacte dans $\mathcal{M}_{K^{oa}}$

$$\Rightarrow 0 \to A_* \to B_* \to C_*$$

On a : $M \longrightarrow (M_*)^a$ dans $\mathcal{M}_{K^{oa}}$
$\quad \shortparallel$
$\mathrm{Hom}(K^o, M)$

Remarque : Si A est une K^{oa}-algebre, A_* est une K^o-algebre.

$a \in \mathrm{Hom}(K^{oa}, A)$, $b \in \mathrm{Hom}(K^{oa}, A)$ $\quad a.b : K^{oa} \leftarrow K^{oa} \otimes K^{oa} \to A \otimes A \to A$.

$K^o \longrightarrow K^o_a \xrightarrow[(1_A)_*]{} A_*$

⚠ $A_!$ n'est pas une algebre !

Hom interne : A K^{oa}-algebre, $M, N \in \mathrm{Obj}(A\text{-Mod})$

$\mathrm{Hom}_A(M,N)^a \in A\text{-Mod}$. Isomorphisme d'adjonction

L, M, N A-modules : $\mathrm{Hom}_A(L \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_A(M,N)^a)$

2. Modules presque de type fini

A une K^{oa}-algebre.

Def. · Le A-module libre de rang n : $A^{\oplus n}$.

· On dit que M, A-module est de type fini s'il existe un épi $A^n \twoheadrightarrow M$.

Remarque : Ce n'est pas une notion très pratique. $\quad (\Leftrightarrow A^n_* \xrightarrow{f} M_*$, $\mathfrak{m}\,\mathrm{coker} f = 0)$

· $\mathfrak{m} \subset K^o$, il est de type fini, car $\mathfrak{m}^a = K^{oa}$.

· $r \in \mathbb{R} \setminus |K^\times|$, $I_r = \{x \in K^o, |x| < r\}$. I_r n'est pas de type fini.

$I_r^a \cong k^a$ ... c'est pas de type fini parce que dans l'autre cas on aurait $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{m} \otimes I_r \cong \mathfrak{m} I_r \cong I_r$

Def. Un A-module M est presque de type fini (resp. presque de representation finie) si $\forall \varepsilon \in \mathfrak{m}$ $\exists M_\varepsilon$ un A-module de type fini (resp. de pres. finie) t.q. $f_\varepsilon : M_\varepsilon \to M$ avec $\varepsilon \cdot \mathrm{Ker}(f_\varepsilon) = \varepsilon\, \mathrm{coker}(f_\varepsilon) = 0$.

Proposition : $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ A-modules

(i) M p.t.f. $\Rightarrow M''$ p.t.f. $\quad$ (ii) M' et M'' p.t.f. $\Rightarrow M$ p.t.f.

(iii) M p.t.f., M'' p.t.f. $\Rightarrow M'$ p.t.f.

(iv) M pres. p.t.f., M' p.p.f. $\Rightarrow M''$ p.p.f.

Exemple : I_r est p.t.f.

3. Modules plat, modules presque projectifs

A K^{oa}-algèbre, M un A-module, $M\otimes_A(-) : A\text{-}\cancel{\mathrm{Mod}} \to A\text{-Mod}$ exact à droite.

$\mathrm{Hom}_A(M,-)^a : A\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$ exact à gauche.

Def. M est dit plat (resp. presque proj.) si $M\otimes_A(-)$ exact (resp. $\mathrm{Hom}(M,-)^a$ exact)

(il n'y a pas de projectifs $\neq 0$ dans $\mathcal{M}_{K^{oa}}$)

Ex: R une K^o-alg., M un R-module, M^a plat $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall_{X\ R\text{-mod}}\ \mathrm{Tor}_1^R(M,X)^a = 0$.

Prop. P un A-module : P presque projectif (+t.f.) $\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon\in m}$ $\varepsilon\mathrm{Id}_P$ se factorise à travers un module libre (+t.f.)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "\varepsilon"] & & P \arrow[dl, "s_\varepsilon"] \\ & L \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \mathrm{Hom}(P,L)^a \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(P,P)^a$$

Proposition: M plat + p.pres. f. $\Leftrightarrow$ presque projectif + p.t.f.

4. Algèbres presque étales

Cas classique : $R \to S$ nonramifié $\Leftrightarrow \Omega^1_{R/S} = 0 \Leftrightarrow S$ soit $S\otimes_R S$-mod. projectif $\quad (S\otimes_R S \simeq S\oplus I_{S/R})$

Def. A une K^{oa}-algèbre, B une A-algèbre. On dit que B est presque non-ramifié, si B est une $B\otimes_A B$-module presque projectif.

B presque étale est étale sur A $\Leftrightarrow$ B presque nonramifié et plat $/A$.

Remarque : B/A p. non.ram. $\Longleftrightarrow \exists\, e \in (B\otimes_A B)_*$ $e^2 = e$, $\mu_{B/A}(e) = 1_{B_*}$

[où $\mu_{B/A} : B\otimes_A B \to B$, $I_{B/A} = \mathrm{Ker}(\mu_{B/A})$] et $(I_{B/A})_* e = 0$

$\Longleftrightarrow \forall_{\varepsilon\in m}\ \exists e_\varepsilon \in (B\otimes_A B)_*$ t.q. $e_\varepsilon^2 = \varepsilon e_\varepsilon$; $\mu_{B/A}(e_\varepsilon) = \varepsilon 1_{B_*}$, $(I_{B/A})_* e_\varepsilon = 0$.

B une A-algèbre presque proj et p.t.f. $\Rightarrow B^* = \mathrm{Hom}_A(B,A)^a$ est p.proj. et p.t.f. et $B^*\otimes_A B \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A(B)^a$.

on veut
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{Tr}_{B/A}"'] & \mathrm{End}_A(B)^a \cong B\otimes B^* \arrow[d] \\ & & A \end{tikzcd}$$

B. Schreen GDT. "Presque"

B_* est une A_*-algèbre

$$\begin{array}{ccc} B_*^{a} & \longrightarrow & \mathrm{End}_{A_*}(B_*)^{a} \\ \wr\! & & \wr\! \\ B & \longrightarrow & \mathrm{End}_A(B) \end{array} \rightsquigarrow t_{B/A} : B \otimes_A B \xrightarrow{\mu_{B/A}} B \xrightarrow{\mathrm{tr}_{B/A}} A$$

Proposition: B est étale sur A $\iff$ $t_{B/A}$ induit un iso $B \xrightarrow{\sim} B^*$.

Exemple: O_C est une O_{K_∞}-algèbre presque étale.

Theoreme (Pureté), Faltings, Scholze) R une K-algèbre perfectoïde S/R une R-algèbre étale. Alors S° = normalisé de R° dans S.

$\Rightarrow$ $S^{\circ a}$ est une $R^{\circ a}$-algèbre presque étale.

5. Deformation des algèbres presque étale.

$\varpi \in |K^\circ$, $|\varpi| < 1$. A une K°-algèbre complete pour la topologie ϖ-adique (i.e. $A \cong \varprojlim A/\varpi^n A$)

Thm. $\exists$ une equivalence de categorie entre $A_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} (A/\varpi A)_{\text{fét}}$

$B \longmapsto B/\varpi B$

presque étale + pres. de pres. fini.

6. Theoreme des diviseurs élementaires

Def. $\varepsilon \in \mathfrak{m}$, M, N deux K°-modules. $M \approx_\varepsilon N \iff \exists\, M \underset{g_\varepsilon}{\overset{f_\varepsilon}{\rightleftarrows}} N$

t.q. $g_\varepsilon f_\varepsilon = \varepsilon \mathrm{id}_M$, $f_\varepsilon g_\varepsilon = \varepsilon \mathrm{id}_N$.

$M \simeq N \iff M \approx_\varepsilon N \quad \forall_{\varepsilon \in \mathfrak{m}}$

Rem. $M^a \cong N^a \Rightarrow M \approx N$ (ex. $I_r \not\cong K^\circ$ $r \notin |K^\times|$)

Thm. M un K°-module p.p.f. $\exists!_{\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_n \geq \ldots \geq 0}$ t.q. $\gamma_i \to 0$

$\exists!_{r \in \mathbb{N}}$: $M \approx (K^\circ)^r \oplus \bigoplus_{i \geq 0} K^\circ / I_{\gamma_i}$ où $I_{\gamma_i} = \{x : -\log|x| \geq \gamma_i\}$.

$\gamma_M = (\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_n \geq \ldots)$

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exacte de K°-mod. de torsion

$\Rightarrow \gamma_M \leq \gamma_{M'} + \gamma_{M''}$ et $\gamma_M = \gamma_{M'} \Rightarrow (M'')^a \cong 0$

$\gamma_{M''} = \gamma_M \Rightarrow (M')^a \cong 0$

<u>Lemme</u> : K alg. clos, car. $p>0$. $\forall_{k\geq 1}$, M_k un K°/ϖ^k-module.

$\rho_k : M_{k+1} \to M_k$, $\iota_k : M_k \to M_{k+1}$; $\varphi_k : M_k \otimes_{K^\circ/\varpi^k} K^\circ/\varpi^{pk} \xrightarrow{\sim} M_{pk}$ t.q.

· M_1 p.t.f. , · $\begin{tikzcd} M_k \arrow[r, "\iota_k"] \arrow[rr, bend right, "\varpi"'] & M_{k+1} \arrow[r, "\rho_k"] & M_k \end{tikzcd}$;

· $M_1 \xrightarrow{\iota_k \circ \cdots \circ \iota_1} M_{k+1} \xrightarrow{\rho_k} M_k$ φ_k compatible à ρ_k, ι_k

$\Rightarrow \exists r$ $\exists$ des iso. $M_k^e \cong (K^\circ/\varpi^k)^r$ $\quad \rho_k \leftrightarrow A/\varpi^k$

$\iota_k \to \varpi : K^\circ/\varpi^k \to K^\circ/\varpi^{k+1}$

$\varphi_k \leftrightarrow$ Frob coord par coord.

<u>Idée</u> : $\gamma_{M_{k+1}} \leq \gamma_{M_1} + \gamma_{M_k} \rightsquigarrow \gamma_{M_k} \leq k\gamma_{M_1}$ mais $\gamma_{M_{pk}} = p\gamma_{M_k} \Rightarrow \gamma_{M_k} = k\gamma_{M_1}$

$\Rightarrow 0 \to M_j^e \to M_{k+j}^e \to M_k^e \to 0$, $M := \varprojlim M_k$, $M^e \cong (K^\circ)^r$

$\rightsquigarrow \underbrace{K \otimes_{K^\circ} M}_{\cong K^r}$, $\varphi = \sigma\,\mathrm{Id}$ ... (calculs)

□