przetłumaczył Joachim Jelisiejew <jjelisiejew@gmail.com>, student MIM UW

4 Rozszerzenia Lubina-Tate'a i funkcja Artina

Ustalmy zupełne nierozgałęzione rozszerzenie L ciała K. Przypomnijmy, że $\mathcal{O} \subseteq K$ jest CDVR tzn. zupełnym pierścieniem waluacji dyskretnej; $\mathfrak{p}$ jest ideałem maksymalnym $\mathcal{O}$[1].

Parametrem (lokalnym) pierścienia DVR[2] nazwiemy element generujący ideał maksymalny tego pierścienia. *Parametrem (lokalnym)* ciała L będziemy nazywać parametr $\mathcal{O}_L$.

[1] *a $\mathfrak{p}_L = \mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ jest maksymalnym ideałem $\mathcal{O}_L$, bo rozszerzenie jest nierozgałęzione, dalej piszemy $\mathfrak{p}$ zamiast $\mathfrak{p}_L$ tam, gdzie nie rodzi to nieścisłości*

[2] *ang. uniformizer*

Definicja 4.1. *Niech $f \in \mathcal{O}_L[X]$ będzie wielomianem unormowanym spełniającym warunki*[3]

$$f \equiv \pi X \pmod{\deg 2} \quad f \equiv X^q \pmod{\mathfrak{p}_L}$$

dla π będącego parametrem ciała L.

Dla każdego $m \geq 1$ oznaczmy przez L_f^m ciało rozkładu $f_m = f^{\varphi^{m-1}} \circ f^{\varphi^{m-2}} \circ \cdots \circ f$[4] *nad L, a przez $\mu_{f,m} \subseteq L_f^m$ — zbiór pierwiastków f_m.*

[3] *z 3.2.1*

[4] *3.9*

Zauważmy, że skoro f jest unormowany, to $\deg f = q$, więc $\deg f_m = q^m$ dla $m \geq 1$.

Przykład 4.2. *W przykładzie 3.6 mieliśmy $L = K = \mathbb{Q}_p$ oraz $f(X) = (1+X)^p - 1 \in \mathcal{O}[X]$, a więc $f^\varphi = f$*[5]*, stąd $f_m = f \circ f \cdots \circ f = (1+X)^{p^m} - 1, \mu_{f,m} = \{\zeta - 1 \mid \zeta \in \mu_{p^m}\}, L_f^m = L(\mu_{p^m})$* [6].

[5] *gdyż φ zachowuje K, patrz def. w 2.2*

[6] *μ_{p^m} jest zbiorem pierwiastków z jedności p^m stopnia*

Lemat 4.3. *Niech $m \geq 1$ i f będą j.w., dla zwięzłości kładziemy $L' = L_f^m$.*

(i) $\mu_{f,m} \subseteq \mathfrak{p}_{L'}$ i możemy ewaluować szeregi formalne o współczynnikach w $\mathcal{O}_L$ na $\mu_{f,m}$.[7]

[7] *Appendix I*

(ii) Dla każdego $x \in K^*$ o waluacji $\nu(x) = m$ i $\alpha \in \mathfrak{p}_{L^{sep}}$ zachodzą równoważności

$$\alpha \in \mu_{f,m} \iff [x]_f(\alpha) = 0 \iff \forall_{a \in \mathfrak{p}^m} [a]_f(\alpha) = 0.$$

$[\cdot]_f$ patrz 3.7, 3.5

Dowód. (i) Z Appendix II wynika, że $\mathcal{O}_{L'}$ jest CDVRem, więc możemy ewaluować szeregi z $\mathcal{O}_L[[X]]$ na elementach $\mathfrak{p}_{L'}$.

$\mathcal{O}_{L'}$ jest całkowitym domknięciem $\mathcal{O}_L$, więc $\mu_{f,m} \subseteq \mathcal{O}_{L'}$. Gdyby pewne $\alpha \in \mu_{f,m}$ nie leżałoby w $\mathfrak{p}_{L'}$ to otrzymalibyśmy $0 = f_m(\alpha) \equiv \alpha^{q^m} \not\equiv 0 \mod \mathfrak{p}_{L'}$[8], czyli sprzeczność.

[8] *gdyż $f \equiv X^q \mod \mathfrak{p}_L$*

(ii) Mamy[9]

$$[x]_f = [x/\pi_m]_{f^{\varphi^m},f} \circ [\pi_m]_{f,f^{\varphi^m}} = [x/\pi_m]_{f^{\varphi^m},f} \circ f_m$$

element x/π_m jest odwracalny, więc $[x/\pi_m]_{f^{\varphi^m},f}$ ma odwrotność, więc $[x]_f(\alpha) = 0 \iff f_m(\alpha) = 0 \iff \alpha \in \mu_{f,m}$. W drugiej równoważności jedna implikacja jest oczywista, a druga wynika z 3.5, gdyż $\mathfrak{p}^m = (x)$.

[9] *W 3.9 mamy $f_m = [\pi_m]_{f,f^{\varphi^m}}$, korzystamy też z 3.5*

□

Stwierdzenie 4.4. *Niech $f \in \mathcal{O}_L[X], m \geq 1$ j.w., wtedy*

(i) Zbiór $\mu_{f,m}$ jest $\mathcal{O}$-modułem z działaniami $+_{F_f}$ i $[\cdot]_f$. Każde $\alpha \in \mu_{f,m}^\times := \mu_{f,m} \setminus \mu_{f,m-1}$ indukuje izomorfizm $\mathcal{O}$-modułów zadany przez

$$\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m \ni a \mod \mathfrak{p}^m \mapsto [a]_f(\alpha) \in \mu_{f,m}.$$

W szczególności $|\mu_{f,m}| = q^m = \deg f_m$, więc f_m i L_f^m są rozdzielcze.

(ii) Jeżeli $\alpha \in \mu_{f,m}^\times$, to $L_f^m = L(\alpha)$, $N_{L_f^m/L}(-\alpha) = \pi^{\varphi^{m-1}}$ i α jest parametrem ciała L_f^m.

Rozszerzenie $L \subseteq L_f^m$ jest całkowicie rozgałęzionym[10] *rozszerzeniem Galois*[11] *stopnia $\left|\mu_{f,m}^\times\right| = q^{m-1}(q-1)$.*

[10] *tzn., z definicji, $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ rozpada się na iloczyn $[L_f^m : L]$ ideałów pierwszych*

[11] *w sensie naszych definicji, patrz 2.5*

(iii) Mamy kanoniczne izomorfizmy grup abelowych

$$\rho_{f,m} : \mathrm{Gal}\left(L_f^m/L\right) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\mu_{f,m}) \to (\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)^* \simeq \mathcal{O}^*/(1+\mathfrak{p}^m).$$

przy czym drugi z nich jest zadane przez warunek: element $\forall_{\alpha \in \mu_{f,m}} \alpha \to [u]_f(\alpha)$ przechodzi na $u \mod \mathfrak{p}^m$.

Dowód. (i) Obierzmy $x \in K^*$ taki, że $\nu(x) = m$. Skoro $x \in \mathcal{O}$ to możemy rozważyć $[x]_f : \mathfrak{p}_L \to \mathfrak{p}_L$. Rozszerzamy $[x]_f$ do $[x]_f : \mathfrak{p}_{L'} \to \mathfrak{p}_{L'}$ [12] przez ewaluację szeregu $[x]_f$.

$\mathfrak{p}_{L'}$ jest $\mathcal{O}$-modułem z działaniami $+_F, [\cdot]_f$ i zachodzi $\mu_{f,m} = \ker[x]_f$[13], a więc $\mu_{f,m}$ jest $\mathcal{O}$-modułem z działaniami $+_F, [\cdot]_f$ i homomorfizm $\mathcal{O} \ni a \to [a]_f(\alpha) \in \mu_{f,m}$ jest dobrze określony (gdzie $\alpha \in \mu_{f,m}^\times$).

Skoro $\mathfrak{p}^m$ anihiluje $\mu_{f,m}$, to homomorfizm ten opuszcza się do homomorfizmu

$$\varphi : \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m \ni a \mod \mathfrak{p}^m \to [a]_f(\alpha) \in \mu_{f,m}.$$

Zależność $\alpha \notin \mu_{f,m-1}$ implikuje, że dla każdego $a \in \mathfrak{p}^{m-1}$ zachodzi $[a]_f(\alpha) \neq 0$[14]. Moduł $\mathfrak{p}^{m-1}/\mathfrak{p}^{m-1}$ przecina się niezerowo z każdym niezerowym podmodułem $\mathcal{O}/p^{m-1}$ i przecina się zerowo z $\ker\varphi$, więc $\ker\varphi = 0$, czyli φ jest iniekcją.

Skoro $|\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m| = q^m = \deg f_m \geq \mu_{f,m}$, to φ jest również surjekcją, a więc izomorfizmem (i $|\mu_{f,m}| = q^m$).

(ii) Niech $L' := L(\alpha)$. Możemy ewaluować szeregi z $\mathcal{O}_L[[X]]$ na elementach $\mathfrak{p}_{L'}$[15], więc z (i) wynika, że $\mu_{f,m} \subseteq \mathfrak{p}_{L'}$, czyli $L' = L_f^m$ i rozszerzenie jest Galois, w zwykłym sensie tego słowa, a więc w sensie naszych definicji, bo pokrywają się dla skończonych rozszerzeń[16].

Chcemy teraz pokazać, że f_m/f_{m-1} jest wielomianem minimalnym α[17]. Współczynnikiem stałym f_m/f_{m-1} jest iloraz współczynników liniowych — $\pi^{\varphi^m} = \prod_{\alpha \in \mu_{f,m}^\times} -\alpha$, więc[18]

$$e(L'|L) = \nu_{L'}(\pi) = \sum \nu_{L'}(-\alpha) \geq \left|\mu_{f,m}^\times\right| \text{ gdyż } \nu_{L'}(-\alpha) \geq 1 \forall_\alpha$$

ale z fundamentalnej równości dla ciał lokalnych wynika $[L' : L] \geq e(L'|L) \geq \left|\mu_{f,m}^\times\right| \geq \deg f_m/f_{m-1} \geq [L(\alpha) : L] = [L' : L]$, a więc zachodzą równości, f_m/f_{m-1} jest minimalnym dla α, więc nierozkładalnym, stąd $N_{L_f^m/L}(-\alpha) = \pi^{\varphi^{m-1}}$, stopień rozszerzenia $[L_f^m : L]$ wynosi $\left|\mu_{f,m}^\times\right| = q^{m-1}(q-1)$ i rozszerzenie to jest całkowicie rozgałęzione.

(iii) Drugi izomorfizm jest trywialny, bo $\mu_{f,m} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{p}^m$ jest cykliczny.

Z definicji $F_f, [x]_f$[19] (dla każdego $x \in \mathcal{O}$) mają współczynniki w L, więc struktura $\mathcal{O}$ modułu jest zachowywana przez $\mathrm{Gal}\,(L'/L)$, czyli ta grupa działa przez $\mathcal{O}$-homomorfizmy. Działanie to jest iniektywne, a grupy mają równe moce, więc jest to izomorfizm.

□

[12] *4.3(i), patrz 3.7 i 3.5 — ważne, że $[x]_f$ nie ma wyrazu wolnego, więc $\mathfrak{p}_{L'}$ zamknięte ze względu na mnożenie przez $[x]_f$.*

[13] *4.3(ii)*

[14] *4.3(ii)*

[15] *4.3(i)*

[16] *uwaga: def. 2.5*

[17] *podzielność f_m/f_{m-1} i dalsze obliczenia wynikają z 3.9*

[18] *φ nie zmienia ν, patrz 2.2*

[19] *3.5*

4.1 Funkcja Artina

Dla urozmaicenia skracamy oznaczenia: piszemy $(\ )^{(i)}$ zamiast $(\ )^{\varphi^i}$ oraz $\mu_{f,m}^{(i)}$ zamiast $\mu_{f^{(i)},m}$ dla wszystkich $i \in \mathbb{Z}$.

Do tej pory zdefiniowaliśmy π_j dla $j \geq 0$[20]. Definiujemy $\pi_j := \left(\pi_{|j|}^{-1}\right)^{(j)}$ dla $j < 0$. Zauważmy, że zachodzi

$$\pi_{j+j'} = \pi_{j'}^{(j)}\pi_j \quad \text{dla wszystkich } j, j' \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Zaiste, powyższa równość zachodzi dla $j, j' \geq 0$[21] oraz dla $j, j' < 0$ przez bezpośrednie przeliczenie i dla $j + j' = 0$ z definicji[22], a stąd wynika, że zachodzi ona wszystkich przypadkach. Skoro φ nie zmienia waluacji[23], to $\nu_L(\pi_j) = j$ dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}$.

Lemat 4.5. *Jeżeli $\theta \in \Theta_{\pi,\pi'}^L$[24] to $\theta^{(j)}/\theta = \pi_j'/\pi'$ dla wszystkich $j \in \mathbb{Z}$. W szczególności $\pi_j \in \Theta_{\pi,\pi^{(j)}}^L$.*

Dowód. Obliczamy, że $\frac{\pi_{j+1}'}{\pi_{j+1}} = \frac{\pi'^{(j)}\pi_j'}{\pi^{(j)}\pi_j} = \left(\frac{\theta^{(1)}}{\theta}\right)^{(j)} \frac{\pi_j'}{\pi_j} = \frac{\theta^{(j+1)}}{\theta^{(j)}} \frac{\pi_j'}{\pi_j}$, więc pierwszą część otrzymujemy przez trywialną indukcję po $|j|$.

Zachodzi $\pi \in \Theta_{\pi,\pi^{(1)}}^L$, więc biorąc $\theta := \pi, \pi' := \pi^{(1)}$ otrzymujemy $\pi^{(j)}/\pi = \frac{\pi_j^{(1)}}{\pi_j}$, a to dokładnie znaczy, że $\pi_j \in \Theta_{\pi,\pi^{(j)}}^L$. □

[20] *3.9, warto dodać, że jeśli L jest stopnia n, tzn. $L = K_n$, to $\pi_n = N_{L/K}(\pi)$.*

[21] *patrz 3.9*

[22] $\pi_0 = 1$

[23] *bo zachowuje $\mathcal{O} \subseteq K$, a więc i $\mathcal{O}_L = \bar{\mathcal{O}}$ i $\mathfrak{p}_L^m \forall_m$*

[24] *tzn. $\theta^{(1)}/\theta = \pi'/\pi$, patrz 3.3*

Lemat 4.6. *Niech $f, f' \in \mathcal{O}_L[X]$ będą określone j.w.*[25] *ze współczynnikami liniowymi π, π' odpowiednio tzn.*

$$f \equiv f' \equiv X^q, \mod \mathfrak{p} \quad f \equiv \pi X \mod \deg 2, \quad f' \equiv \pi' X \mod \deg 2.$$

gdzie każde z π, π' jest parametrem ideału $\mathfrak{p}$.

Element $\theta \in \Theta^{L,\times}_{\pi,\pi'}$[26] *definiuje dla wszystkich $m \geq 1$ izomorfizm $\mathcal{O}$-modułów*[27] $[\theta] := [\theta]_{f,f'} : \mu_{f,m} \to \mu_{f',m}$ *implikujący $L^m_f = L^m_{f'}$.*

[25] *Oczywiście f' NIE oznacza pochodnej f.*

[26] *3.7ii*

[27] $[\cdot]_{f,f'}$ *patrz 3.5*

Dowód. Z określenia $[\theta]$ w 3.5 mamy $f' \circ [\theta] = [\theta]^{(1)} \circ f$. Przez indukcję dowodzimy, że $f'_m \circ [\theta] = [\theta]^{(m)} \circ f_m$.

Zachodzi $[\theta]^{(1)}_{f,f'} = [\theta^{(1)}]_{f^{(1)},f'^{(1)}}$[28], więc $[\theta]^{(m)}_{f,f'} = [\theta^{(m-1)}]^{(1)}_{f^{(m-1)},f'^{(m-1)}}$ dla $m \geq 1$, stąd $f'^{(m-1)} \circ [\theta]^{(m-1)}_{f,f'} = [\theta]^{(m)}_{f,f'} \circ f^{(m-1)}$. To jest dokładnie krok indukcyjny.

Otrzymujemy $f'_m([\theta](\alpha)) = [\theta]^{(m)} \circ f_m(\alpha) = 0$ dla każdego $\alpha \in \mu_{f,m}$, więc $[\theta]$ przenosi $\mu_{f,m}$ na $\mu_{f',m}$. Jest to $\mathcal{O}$-homomorfizm z odwrotnością $[\theta^{-1}]$[29].

Mamy $[\theta], [\theta^{-1}] \in \mathcal{O}_L[[X]]$, więc[30] $\mu_{f',m} = [\theta]\mu_{f,m} \subseteq L^m_f$, stąd (anal.) $L^m_f = L^m_{f'}$. □

[28] *3.8*

[29] *3.5*

[30] *por. 4.4i*

Stwierdzenie 4.7. *Niech f, π będą jak wyżej, $m \geq 1$.*[31]

(i) Rozszerzenie L^m_f jest Galois nad K. Dla każdego $\alpha \in \mu^\times_{f,m}$ następująca funkcja jest bijekcją

$$K^*/(1+\mathfrak{p}^m) \ni x \mod 1+\mathfrak{p}^m \mapsto [x\pi_j]_{f,f^{(j)}}(\alpha) \in \coprod_{j\in\mathbb{Z}} \mu^{(j),\times}_{f,m} \text{ gdy } \nu(x) = -j$$

(ii) Rozważmy przypadek $L = \hat{K}$. Wtedy funkcje $\rho_{f,m} : \mathrm{Gal}\left(L^m_f/L\right) \to (\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)^\times$[32] *rozszerzają się do izomorfizmów grup*[33]

$$\rho_{f,m} : W(\hat{K}^m_f/K) \to K^*/(1+\mathfrak{p}^m)$$

zdefiniowanych przez φ^j na $\hat{K}$ taki, że $\left(\alpha \to [x\pi_j](\alpha)\forall_{\alpha\in\mu_{f,m}}\right) \mapsto x \mod 1+\mathfrak{p}^m$ (oczywiście wtedy $\nu(x) = -j$).

Jeżeli położymy $\hat{K}^{LT}_f := \bigcup_{m\geq 1} \hat{K}^m_f$ to $\rho_{f,m}$ przedłużają się to izomorfizmu

$$\rho_f : W(\hat{K}^{LT}_f/K) \to K^*.$$

[31] *$\hat{K}$. Z definicji $\hat{K} = \hat{K}^{ur}$, w szczególności z rozdziału 2. wynika, że $\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{p}}$ jest algebraicznym rozszerzeniem $\mathbb{F}_q$ zawierającym wszystkie pierwiastki z jedności wszystkich stopni, więc jest równe algebraicznego domknięciu $\mathbb{F}_q$, czyli $\overline{\mathbb{F}}_q$.*

[32] *4.4(iii)*

[33] *Definicja grupy Weila W, patrz 2.5, definicja $\rho_{f,m}$ — 4.4*

Dowód. (i) Mamy $\pi_j \in \Theta^L_{\pi,\pi^{(j)}}$[34] i $x \in K^*$, stąd $x\pi_j \in \Theta^L_{\pi,\pi^{(j)}}$ jest elementem o waluacji $\nu(\pi_j x) = 0$, czyli $x\pi_j \in \Theta^{L,\times}_{\pi,\pi^{(j)}}$[35].

Z lematu 4.6 wynika teraz, że $[x\pi_j] : \mu_{f,m} \to \mu^{(j)}_{f,m}$ jest izomorfizmem. Z $\mathcal{O}$-liniowości przekształcenia wynika, że obraz $\nu^{-1}(i)/(1+\mathfrak{p}^m)$ zawiera się w $\mu^{(i),\times}_{f,m}$[36]. Na mocy 4.4(iii) przekształcenie $\nu^{-1}(i)/(1+\mathfrak{p}^m) \to \mu^{(i)}_{f,m}$ jest bijekcją[37].

Pozostaje wykazać, że rozszerzenie jest Galois. Przypomnijmy, że $L(\alpha) = L^m_f = L^m_{f^{(j)}}$[38].

Wynika stąd, że $L^m_{f^{(j)}}$ jest całkowicie rozgałęzione, co więcej $\varphi^j \in \mathrm{Aut}\,(L/K)$ rozszerza się do L^m_f na dokładnie $|\mu_{f,m}| = [L^m_f : L]$ sposobów[39], czyli spełnione są warunki[40] na to, żeby L^m_f $(\supseteq L)$ było Galois nad K.

(ii) Rozważmy $\sigma \in W(\hat{K}^m_f/K), \sigma_{|\hat{K}} = \varphi^j$. Zauważmy, że $\sigma\left(\mu_{f,m}\right) \subseteq \mu^{(j)}_{f,m}$[41]. Obierzmy $\alpha \in \mu^\times_{f,m}$, wtedy $\sigma(\alpha) \in \mu^{(j),\times}_{f,m}$, więc z (i) istnieje dokładnie jeden $x \mod 1+\mathfrak{p}^m$ o waluacji $-j$ taki, że $\sigma(\alpha) = [x\pi_j](\alpha)$.

Równość $\sigma(\beta) = [x\pi_j](\beta)$ zachodzi dla wszystkich $\beta \in \mu_{f,m}$, gdyż dla każdego $a \in \mathcal{O}$ mamy $\sigma\left([a]_f(\alpha)\right) = [a]^{(j)}_f\sigma(\alpha) = [a]_{f^{(j)}}\sigma(\alpha) = [a]_{f^{(j)}}[x\pi_j]_{f,f^{(j)}}(\alpha) = [x\pi_j a]_{f,f^{(j)}}(\alpha) = [x\pi_j]_{f,f^{(j)}}[a]_f(\alpha) = \sigma([a]_f(\alpha))$ a $\mathcal{O}$ działa tranzytywnie na $\mu_{f,m}$.

[34] *4.5*

[35] *3.7ii*

[36] *z warunku z 4.3(ii)*

[37] *trzeba popatrzeć na $\mathcal{O}^* = \nu^{-1}(0)$ które parametryzuje $\nu^{-1}(i)$.*

[38] *pierwsza= na mocy 4.4(ii), druga= na mocy 4.5 i 4.6*

[39] *4.4(iii)*

[40] *2.5*

[41] *bo $\sigma(f) = f^{(j)}$*

$[a]_{f^{(j)}} = [a]^{(j)}_f$ na mocy 3.8

Wynika stąd, że przyporządkowanie ρ_f jest dobrze określone. Jest ono homomorfizmem grup, gdyż jeśli $\rho_f(\sigma) = x, \rho_f(\tau) = y$ i $\nu(x) = -j, \nu(y) = -j'$, to

$$\sigma\tau(\alpha) = \sigma\left([y\pi_{j'}](\alpha)\right) = [y\pi_{j'}]^{(j)}[x\pi_j](\alpha) = [y\pi_{j'}^{(j)}x\pi_j](\alpha) = [xy\pi_{j+j'}](\alpha).$$

patrz 1., określające π_j

Obcięcie ρ_f to $\mathrm{Gal}\left(\hat{K}_f^m/\hat{K}\right)$ jest izomorfizmem[42], a iloraz — $W(\hat{K}/K) = \mathrm{Frob}_K^{\mathbb{Z}}$ przechodzi bijektywnie na $K^*/\mathcal{O}^* \simeq \mathbb{Z}$, innymi słowy mamy diagram

[42] *4.4(iii)*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Gal}\left(\hat{K}_f^m/\hat{K}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & W(\hat{K}_f^m/K) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{f,m}"] & W(\hat{K}/K) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^*/(1+\mathfrak{p}^m) \arrow[r] & K^*/(1+\mathfrak{p}^m) \arrow[r] & K^*/\mathcal{O}^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

i środkowa strzałka jest izomorfizmem np. z lematu o pięciu, czy bezpośredniego przeliczenia. Przekształcenie ρ_f jest więc izomorfizmem jako granica $\rho_{f,m}$.

□

Do całkowitego szczęścia potrzeba nam tylko dostatecznie dużo przejść pomiędzy parami f, f', czyli potrzeba nam następnego stwierdzenia

Stwierdzenie 4.8. *Funkcja $\psi : \hat{\mathcal{O}} \ni \theta \to \theta^\varphi/\theta \in \hat{\mathcal{O}}^*$ jest surjekcją. W szczególności $\Theta_{\pi,\pi'}^{\hat{K},\times} \neq \emptyset$ dla każdych parametrów $\pi, \pi' \in \hat{K}$.*

Dowód. Mamy $\hat{\mathcal{O}}^* \simeq \varprojlim \left(\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{p}}^m\right)^* \simeq \varprojlim \hat{\mathcal{O}}^*/(1+\hat{\mathfrak{p}}^m)$ i $\psi(1+\hat{\mathfrak{p}}^m) \subseteq 1+\hat{\mathfrak{p}}^m$[43], więc wystarczy pokazać, że dla każdego $u \in \hat{\mathcal{O}}^*$ istnieje nitka (θ_m)[44] w granicy projektywnej taka, że $\psi(\theta_m) \equiv u \mod \hat{\mathfrak{p}}^m$.

Najpierw otrzymajmy θ_1. Mamy $\hat{\mathcal{O}}/\hat{\mathfrak{p}} \simeq \overline{\mathbb{F}}_q$[45]. Funkcja $\bar{\psi} : \alpha \to \alpha^{q-1}$ na tym ciele jest surjekcją[46], wybieramy θ_1 jako dowolny przeciwobraz u.

Załóżmy, że skonstruowaliśmy $\theta_1, \ldots, \theta_m$. Mamy więc $u/\psi(\theta_m) = 1 + \alpha\tilde{\pi}^m$[47]. Funkcja $\alpha \to \alpha^q - \alpha = \alpha^{\bar{\varphi}} - \alpha$ jest również surjekcją na $\overline{\mathbb{F}}_q^*$[48], więc istnieje β takie, że $\beta^\varphi - \beta \equiv \alpha \mod \hat{\mathfrak{p}}$. Jeżeli $\theta_{m+1} := \theta_m(1+\beta\tilde{\pi}^m)$, to

$$\psi(\theta_{m+1}) = \psi(\theta_m)\psi(1+\beta\tilde{\pi}^m) \equiv u\frac{1+\beta^\varphi\tilde{\pi}^m}{(1+\beta\tilde{\pi}^m)(1+\alpha\tilde{\pi}^m)} \equiv$$
$$u(1+\beta^\varphi\tilde{\pi}^m)(1-\beta\tilde{\pi}^m)(1-\alpha\tilde{\pi}^m) \equiv u\left(1+(\beta^\varphi-\beta-\alpha)\tilde{\pi}^m\right) \equiv 1 \mod \hat{\mathfrak{p}}^{m+1} = (\tilde{\pi})^{m+1}.$$

□

[43] *gdyż $1+\hat{\mathfrak{p}}^m$ jest grupą i φ zachowuje $\hat{\mathfrak{p}}$.*

[44] *tzn. element projektywnej, co sprowadza się do warunku $\theta_{m+1} \equiv \theta_m \mod \hat{\mathfrak{p}}^m$.*

[45] *patrz def. $\hat{K}$ we wcześniejszym przypisie.*

[46] *bo $\overline{\mathbb{F}}_q$ jest algebraicznie domknięte.*

[47] *gdzie $\tilde{\pi}$ jest parametrem $\hat{K}, \tilde{\pi} \in K$, korzystamy tutaj z nierozgałęzienia $K \subseteq \hat{K}$.*

[48] *bo $\overline{\mathbb{F}}_q$ jest algebraicznie domknięte*

Wniosek 4.9. *Ciała $\hat{K}_f^m$ i funkcje $\rho_{f,m}$, a więc i $\hat{K}_f^{LT}$ i ρ_f są niezależne(!) od f. Od tej pory będziemy je zapisywać bez subskryptu $_f$.*

Dowód. Rozważmy f, f' z liniowymi współczynnikami π, π' i $\theta \in \Theta_{\pi,\pi'}^{\hat{K},\times}$[49]. Zadaje ono izomorfizm $[\theta] : \mu_{f,m} \to \mu_{f',m}$. Wobec tego[50] $\hat{K}_f^m = \hat{K}_{f'}^m$. Jeżeli $\sigma(\alpha) = [x\pi_j](\alpha)$ jest elementem $W(\hat{K}_f^m/K)$, to $\sigma([\theta](\alpha)) = [\theta]^{(j)}[x\pi_j](\alpha) = [x\pi_j][\theta](\alpha)$[51], stąd $\rho_{f,m} = \rho_{f',m}$. □

[49] *istniejącego na mocy poprzedniego stwierdzenia*

[50] *4.6*

[51] *4.5*

Cały ten rozdział służył w zasadzie zdefiniowaniu

Definicja 4.10 (Funkcja Artina)**.** *Dla każdego $f \in \mathcal{O}_L[X]$ spełniającego warunki z początku rozdziału (gdzie $L \supseteq K$ jest skończone) kładziemy $K^m := K^{ur}L_f^m$*[52]*. Wtedy K^m/K jest skończenie rozgałęzione i Galois*[53]*. Na mocy lematu 2.2 uzupełnienie K^m to $\hat{K}L_f^m := \hat{K}^m$ i $K^m = \hat{K}^m \cap K^{sep}$, jest więc to niezależne od wyboru f.*

Kładziemy $K^{LT} := \bigcup_{m\geq 1} K^m = \hat{K}^{LT} \cap K^{sep}$. Zauważmy, że $W(K^{LT}/K) \simeq W(\hat{K}^{LT}/K)$[54]*.*

Nazywamy skończone rozszerzenie K rozszerzeniem Lubina-Tate'a *jeżeli jest zawarte w K^{LT}. Odwrotność ρ nazywamy* funkcją Artina *ciała K i piszemy $\mathrm{Art}_K : K^* \to W(K^{LT}/K)$. Funkcja Artina zachowuje waluację: $\nu \circ \mathrm{Art}_K = \nu$.*

[52] *dla definicji, patrz podrozdział 2.2*

[53] *4.7(i)*

[54] *gdyż w przypadku skończonym terminologia Galois i Weila pokrywają się z naturalnymi*

5 Appendix II

Uwaga: materiał w tym appendiksie nie występuje w oryginalnym tekście, jest on uproszczeniem za cenę odwołań do literatury.

Twierdzenie 5.1 (Krull-Akizuki)**.** *Jeżeli $\mathcal{O}$ jest dziedziną noetherowską wymiaru jeden (tzn. każdy niezerowy ideał pierwszy jest maksymalny), $K = (\mathcal{O})$ i L jest skończonym rozszerzeniem K, to domknięcie całkowite $\overline{\mathcal{O}} \subseteq L$ jest Dedekinda.*[55]

[55] *Źródło: Nie udało mi się znaleźć sensownego źródła, natomiast w internecie jest ∞ dowodów.*

Stwierdzenie 5.2. *Na skończenie wymiarowej przestrzeni V nad ciałem K wszystkie normy są równoważne. W szczególności jeżeli K jest ciałem waluacji, a L jest skończonym K modułem, to na L istnieje dokładnie jedna waluacja rozszerzająca waluację z K.*

Jeżeli K było zupełne to i L jest zupełne.[56]

[56] *Źródło: Neukirch. "Algebraic number theory", prop. 4.9*

Twierdzenie 5.3. *Jeżeli $\mathcal{O}_K$ jest CDVRem i $(\mathcal{O}_K) = K \subseteq L$ jest skończonym rozszerzeniem ciał to $\mathcal{O}_L = \overline{\mathcal{O}_K}$ będący całkowitym domknięciem $\mathcal{O}_K$ w L jest CDVRem.*

Dowód. [57]

Z twierdzenia wiemy, że $\mathcal{O}_L$ jest Dedekinda, więc $\mathcal{O}_L$ jest przecięciem wszystkich pierścieni waluacji dyskretnej zawierających go. Pierścienie te są pierścieniami waluacji na L rozszerzających waluację z K, a więc zbiór tych pierścieni jest jednoelementowy (waluacje równoważne zadają ten sam pierścień waluacji). Tym samym $\mathcal{O}_L$ jest DVRem, który jest zupełny, gdyż L jest zupełne na mocy stwierdzenia. $\square$

[57] *Teza tego twierdzenia różni się od Appendixu I brakiem założenia separowalności.*