B. Schraen "corr. de Langlands p-adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$" $k = \mathcal{O}/\varpi$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_E$, $\varpi \in \mathcal{O}$,

Histoire: But initial: $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_2(E)$, $E/\mathbb{Q}_p$ fini, de Rham $\mapsto B(\rho) \circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p)$ unitaire

E espace de Banach

Idée (Breuil): $\rho \underset{\text{(Fontaine)}}{\rightsquigarrow} WD(\rho)$ Weil-Deligne $\underset{\text{Langlands}}{\rightsquigarrow} \pi(\rho) \circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p)$

loc. classique

Supposons $HT(\rho) = (0, k-1)$, $k \geq 2$ $(\mathrm{Sym}^{k-2} E^2) \otimes \pi(\rho) \circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et on

cherche la norme invariant par $GL_2(\mathbb{Q}_p) \rightsquigarrow$ complétée $= B(\rho)$

⚠ Il existe plusieurs classes de commensurabilité de normes invariantes.

Colmez: utilisation des (φ, Γ)-modules.

surprise: on peut associer un $B(\rho)$ à toute ρ (pas nec. de Rham)

Point essentiel: ρ est de Rham à poids HT. $\neq$. $\Leftrightarrow B(\rho)$ a des vecteurs loc. alg.

1. Le foncteur de Colmez

Idée: définir mod p, mod p^2, ...

Définition: Une rep. $\mathcal{O}$-linéaire lisse de $G := GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est un couple (π, M) où M est un $\mathcal{O}$-module de torsion et $\pi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(M)$ t.q. $\forall v \in M$, $\mathrm{stab}_G(v)$ est ouvert

Supposons (π, M) de longueur fini: $\exists M_0 \subset M$ un sous-$\mathcal{O}$-module de type fini stable par KZ, $K = GL_2(\mathbb{Z}_p)$, $Z = \mathbb{Q}_p^\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et engendrant M $(\mathcal{O}[G] M_0 = M)$.

$I^+_{M_0}(M) := \sum_{n \geq 0} \mathcal{O}[\mathbb{Z}_p] \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M$. Alors on a

$\mathbb{Z}_p$ agit via $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $c\text{-}\mathrm{ind}_{KZ}^G M_0 \twoheadrightarrow M$

- $\mathcal{O}[\mathbb{Z}_p]$ est munie d'un endomorphisme φ obtenu par l'action de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I^+_{M_0}(M)$ est muni d'un endo φ semilinéaire ($I^+_{M_0}(M)$ est $\mathcal{O}[\mathbb{Z}_p]$-module) par conjugaison

$\Gamma = \mathbb{Z}_p^\times \simeq \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma \hookrightarrow \mathcal{O}[\mathbb{Z}_p]$ $\Rightarrow \Gamma \hookrightarrow I^+_{M_0}(M)$ semilinéaire. Γ commute à φ.

Thm (Berthel-Livné, Breuil, Colmez, Berger) $\lg_{\mathcal{O}}\left(I^+_{M_0}(M)^{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right) < +\infty$.

Rem. (1) c'est pas vraie pour M seul, c'est pourquoi on prends M_0.

(2) faux pour $GL_2(F)$, $F \neq \mathbb{Q}_p$.

$I^+_{M_0}(M)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(I^+_{M_0}(M), E/\mathcal{O}) \to \mathcal{O}[\mathbb{Z}_p]$-module de type fini.

$\mathcal{O}[\mathbb{Z}_p] \cong \mathcal{O}[X] = \mathcal{O}^+_{\xi}$. On pose $\mathcal{O}_{\xi} := \mathcal{O}[X][\frac{1}{X}]$ ← pour topologie p-adique

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \longleftarrow X$

Alors $D(\pi) = I^+_{M_0}(M)^\vee \otimes_{\mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$-mod. de longueur finie qui ne depends pas du choix de M_0.

$\varphi : \mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L} \otimes_{\mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L},\varphi} I^+_{M_0}(M) \to I^+_{M_0}(M)$ $\mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L}$-lineaire. $\rightsquigarrow \varphi^\vee : I^+_{M_0}(M)^\vee \to (\mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L} \otimes_{\mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L},\varphi} I^+_{M_0}(M))^\vee \cong$

Après $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L} \otimes \bullet -$, on peut montrer que $\varphi^\vee$ est bijective. $\cong \mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L} \otimes_{\mathcal{O}^+_{\mathcal{E}_L},\varphi} I^+_{M_0}(M)^\vee$

$\varphi = (\varphi^\vee)^{-1} : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L},\varphi} D(\pi) \to D(\pi)$. La même pour Γ.

$\Rightarrow D(\pi)$ a une structure de (φ,Γ)-module étale.

complète p-adique

<u>Déf</u>: $V(\pi) = \mathrm{Hom}_{\varphi,\Gamma,\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}}\left(D(\pi), \hat{\mathcal{E}}_L^{nr}/\hat{\mathcal{O}}^{nr}\right)$. où $\mathcal{E}_L = \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L})$, $\mathcal{E}_L^{nr}/\mathcal{E}_L$, $\widehat{\mathcal{E}_L^{nr}}$

$\circlearrowleft G_{\mathbb{Q}_p}$ $\quad V : \mathrm{Rep}^{lf}_{\mathcal{O}} G \to \mathrm{Rep}^{lf}_{\mathcal{O}} G_{\mathbb{Q}_p}$.

<u>Prop.</u> (Colmez) Ce foncteur est exact.

<u>Consequence</u>: $\pi \in \mathrm{Rep}^{lf}_{\mathcal{O}} G$: $\mathrm{Def}_\pi(-) \to \mathrm{Def}_{V(\pi)}(-)$. transformation naturelle

<u>2. Atomes</u>: Rep. irreductibles lisse de G sur k: σ une rep. lisse irred. de KZ (de dim. finie) $\quad c\text{-}\mathrm{Ind}^G_{KZ}\,\sigma \circlearrowleft G$. $\mathrm{End}_G(c\text{-}\mathrm{Ind}^G_{KZ}\,\sigma) \cong k[T_\sigma]$

$\pi(\sigma,a) = \dfrac{c\text{-}\mathrm{Ind}^G_{KZ}\,\sigma}{(T-a)}$. Pour $a=0$: $\pi(\sigma,0)$ est toujours irreductible.

<u>Thm</u> (Barthel-Livné, Breuil) Les seuls representations abs. irred. de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ (lisses sur k) sont:

- $\mathrm{Ind}^G_B(\chi_1 \otimes \chi_2)$, $\chi_1 \neq \chi_2$
- $\chi \circ \det$, $(\chi \circ \det) \otimes Sp = \mathrm{Ind}^B_G(\chi \otimes \chi)/(\chi \circ \det)$
- $\pi(\sigma,0)$ supersingulieres.

Les seuls isom. sont $\pi(\mathrm{Sym}^k k^2, 0) \cong \pi(\mathrm{Sym}^{p-1-k} k^2 \otimes \det{}^k, 0)$

<u>Proposition</u> (Colmez): Soit $\omega = \chi_{cyc} \circ \mathrm{rec}^{-1}$ $(\mathrm{rec}(p) = \mathrm{Fr}_p^{-1})$. à caracter central près.

Suppose $\chi_1 \neq \chi_2 \omega^{-1}$. Alors
- $V(\mathrm{Ind}^G_B(\chi_1 \otimes \chi_2 \omega^{-1})) = \chi_2$
- $V(\chi \circ \det) = 0$, $\quad$ • $V((\chi \circ \det) \otimes Sp) = \omega\,(\chi \circ \mathrm{rec})$
- $V(\pi(\mathrm{Sym}^k, 0)) = \mathrm{Ind}\,\omega_2^{k+1}$ = l'unique rep. de $G_{\mathbb{Q}_p}$: $(\cdot)|_{I_{\mathbb{Q}_p}} \cong \omega_2^{k+1} \oplus \omega_2^{p(k+1)}$ et de det ω_2^{k+1}.

$V(\pi \otimes (\chi \circ \det)) \cong V(\pi) \otimes (\chi \circ \mathrm{rec})$

où ω_2 caractere fondament. de niveau 2

$\omega_2(g) = \dfrac{g(p^{\frac{1}{p^2-1}})}{p^{\frac{1}{p^2-1}}} \in \mu_{p^2-1} \cong \mathbb{F}_{p^2}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$

3. Anneaux de déformations

Proposition (Colmez) V une rep. k-linéaire de dim 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et supp. $V \sim \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \otimes \chi$.

$\exists\, \bar{\pi}$ une rep. k-linéaire lisse de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ t.q. $V(\bar{\pi}) \cong V$.
et car. central $(\bar{\pi}) = \det(V)\,\omega^{-1}$

Ex. $V \sim \begin{pmatrix} \chi_1 & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ $\quad * \neq 0 \Rightarrow \exists\ 0 \to \mathrm{Ind}(\chi_2 \otimes \chi_1 \omega^{-1}) \to \bar{\pi} \to \mathrm{Ind}(\chi_1 \otimes \chi_2 \omega^{-1}) \to 0$

$V(\bar{\pi}) = V$

$\psi : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ caractère continu t.q. $\bar{\psi} = \det(V)\,\omega^{-1}$.

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_2(k)$, $V(\bar{\pi}) = \bar{\rho}$. Alors $V : \mathrm{Déf}_{\bar{\pi}}(-) \to \mathrm{Déf}_{\bar{\rho}}(-)$.

Si $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{\rho}) = k \cong \mathrm{End}_G(\bar{\pi})$ (Colmez) $\rightsquigarrow R_{\bar{\rho}} \to R_{\bar{\pi}}^{\psi} \leftarrow$ déf. de car. central ψ.

Thm. (Colmez, Kisin) (Paskunas) : • $R_{\bar{\rho}} \twoheadrightarrow R_{\bar{\pi}}^{\psi}$ surjective.

$\mathrm{Ext}^1(\bar{\pi}, \bar{\pi}) \overset{V}{\hookrightarrow} \mathrm{Ext}^1(V(\bar{\pi}), V(\bar{\pi}))$ • $\bar{\rho} \sim \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \otimes \chi$, $\mathrm{End}(\bar{\rho}) = k$ et $\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{\rho}, \bar{\rho}(1)) = 0$

Alors
$$\begin{tikzcd} R_{\bar{\rho}} \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & R_{\bar{\pi}}^{\psi} \\ & R_{\bar{\rho}}^{\psi\omega} \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Idée de la preuve: (Berger-Breuil, cas cristalline) $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_2(E)$ cristalline irréductible.

$\exists\, B(\rho) \circlearrowleft G$ E-esp. de Banach top. irréductible unitaire t.q.
$$V(B(\rho)^\circ) \otimes E \cong \rho.$$

$\mathrm{Spec}\, R_{\bar{\pi}}^{\psi} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, R_{\bar{\rho}}$ Kisin: ces points sont denses ds $\mathrm{Spec}\, R_{\bar{\rho}}^{\psi\omega}[\frac{1}{p}]$

points cristalline irréd. $\Rightarrow \mathrm{Spec}\, R_{\bar{\rho}}^{\psi\omega} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\, R_{\bar{\pi}}^{\psi}$. Alors

$$\begin{tikzcd} R_{\bar{\pi}}^{\psi\omega} \arrow[r] & R_{\bar{\rho}}^{\psi\omega} \arrow[l, dashed, bend right] \\ R_{\bar{\rho}} \arrow[u, two heads] \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$
Paskunas dans les cas non-obstrués

$$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_2(E) \longleftrightarrow \begin{tikzcd} R_{\bar{\rho}}^{\psi\omega} \arrow[r] & E \\ R_{\bar{\pi}}^{\psi} \arrow[u, two heads, "\cong"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \leftarrow B(\rho) \rightsquigarrow V(B(\rho)) = \rho.$$

Thm. (Colmez) $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_2(E)$ continue, $\bar{\rho} \sim \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$. Alors
ρ de Rham de HT poids $a < b \Leftrightarrow B(\rho)^{\text{l.alg}} \neq 0$. ← correspondance sur $\mathbb{C}$.

Dans ce cas $B(\rho)^{\text{loc. alg.}} = \mathrm{Sym}^{b-a-1} E^2 \otimes \det{}^{a} \otimes \pi(\rho)$

4. Classification de Paskunas

$\rho \mapsto B(\rho)$, $\Pi \circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p)$ irred. (adm.), $\dim_{\mathbb{C}} V(\Pi) \leq 2$. Soit $\Pi^\circ \subset \Pi$ boule unité

$E \otimes V(\Pi^\circ) = \varprojlim_m V(\Pi^\circ / \varpi^m \Pi^\circ) \otimes E$.

$\overset{\shortparallel}{V(\Pi)}$.

<u>Idée</u>: $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_2(k)$, $\mathrm{End}(\bar{\rho}) = k$. $R^{\psi}_{\bar{\pi}} \xrightarrow{\sim} R^{\psi\omega}_{\bar{\rho}}$.

ρ^u la def. universelle de $\bar{\rho}$. $\rho^u : G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_2(R^{\psi\omega}_{\bar{\rho}})$, $\rho^u = V(\Pi^u)$.

$(\Pi^u)'$ objet projectif dans une bonne categorie: $\circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Alors, si $\Pi \circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p)$, $\bar{\pi}$ apparait ds la red. mod p de Π

alors $(\Pi^u)' \twoheadrightarrow \Pi'$

Si Π une rep. de G sur E-esp. de Banach unitaire, $\Pi' = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}(\Pi^\circ, \mathcal{O})$ ← $\mathcal{O}$-module profini, sans torsion (boule unité)

<u>Def.</u> Un G-module <u>pro-augmenté</u> est un $\mathcal{O}[[H]]$-mod. muni d'une action de $\mathcal{O}[[H]]$, $H \subset G$ compact ouvert. profini muni d'une action compatible de $\mathcal{O}[G]$.

$\rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\text{pro-aug}}_{\mathcal{O}}(G)$ cat. abelienne.

$\psi : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ continu, $\mathcal{C}_\psi \subset \mathrm{Mod}^{\text{pro-aug}}_{\mathcal{O}}(G)$ obj. avec car. central ψ^{-1}.

Si $\bar{\pi}$ est une rep. lisse irred de G sur k. $\bar{\pi}^\vee = \mathrm{Hom}(\bar{\pi}, E/\mathcal{O}) = \mathrm{Hom}(\bar{\pi}, k) \in \mathcal{C}_\psi$

Soit $\tilde{P}$ = enveloppe projective de $\bar{\pi}^\vee$ dans $\mathcal{C}_\psi$.

$\hat{E} = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_\psi}(\tilde{P})$ - anneau local profini, non commutatif.

$\rightsquigarrow \hat{E}^{ab}$ represente le problème de déf de $k \otimes_{\hat{E}} \tilde{P}$.

a) cas supersingulier <u>Thm (Paskunas)</u> Soit $\bar{\pi}$ supersingulier. Il y a une bijection

$$\left\{ \begin{array}{c} \Pi \circlearrowleft GL_2(\mathbb{Q}_p) \text{ irred.} \\ \text{unitaire admissible} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \hat{E}[\tfrac{1}{p}]\text{-modules simples} \right\}$$

2) $\hat{E} \cong R^{\psi\omega}_{V(\bar{\pi})}$; $V^\vee(\tilde{P}) \cong V(\bar{\pi})^u$ où $V^\vee(\tilde{P}) = V(\tilde{P}^\vee)(\omega\psi)$

$\hat{E}^{ab} \cong R^{\psi}_{\bar{\pi}} \longrightarrow R^{\psi\omega}_{V(\bar{\pi})} \cong \mathcal{O}[[x_1, x_2, x_3]]$