Continuation de la preuve du théorème de Gee-Kisin

$K/\mathbb{Q}_p$ finie. $\bar{r} : G_K \to GL_2(\mathbb{F})$ continue.

$\lambda = ((\lambda_{\tau,1}, \lambda_{\tau,2}))_{\tau \in \mathrm{Hom}(K,E)}$ type de Hodge-Tate

$\tau : I_K \to GL_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ type.

$R^{\square}_{\bar{r}}(\lambda,\tau)$ algèbre de déformations locale de type (λ,τ)

Comment déterminer $e\left(R^{\square}_{\bar{r}}(\lambda,\tau)/\varpi\right)$?

Formes automorphes sur un groupe unitaire G. $R^{\square}_{\bar{r}}(\lambda,\tau)$-module

$S_{\lambda,\tau}(U,\mathcal{O})_{\bar{\mathfrak{m}}}$

Pourquoi des groupes unitaires ?

[D algèbre de quaternions de centre F, compacte modulo son centre à l'∞

$\to$ il faut considérer des espaces de formes automorphes

$S^{\psi}_{\lambda,\tau}(U,\mathcal{O})$ avec $\psi : \mathbb{A}_F^\times / F^\times \to \mathcal{O}$, car

$F^\times \backslash (D \otimes \mathbb{A}_F^\infty)^\times / U \mathbb{A}_F^\times$ est compact.

Condition sur ψ pour que $S^{\psi}_{\lambda,\tau}(U,\mathcal{O}) \neq 0$

~~$\psi|_{\mathbb{A}_F^\times} = \psi_0 \mathrm{rec}^{-1} = \chi_{cyc}$~~

$\psi|_{F_v^\times} = \left(x \mapsto \prod_{\iota : F_v \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \iota(x)^{\lambda_{1,\iota}+\lambda_{2,\iota}}\right) \cdot (\det \tau_v)(\mathrm{rec})$

ψ existe ssi $\lambda_{1,\iota} + \lambda_{2,\iota}$ indépendant de ι.

$\Rightarrow$ tous les $\lambda_{1,\iota} - \lambda_{2,\iota}$ ont la même parité.

$\Rightarrow$ poids de Serre de $\bar{e}$ ~~de même~~ sont "parétaires"]

1. La méthode de Taylor-Wiles-Kisin

Données : F corps CM, $F^+ \subset F$ sous-corps tot réel.

$G/\mathcal{O}_{F^+}$ groupe réductif, avec $G(\mathbb{R})$ compact et

$$G(F^+) \simeq \prod_{\substack{v \nmid p \\ v = w w^c}} (GL_2(F_w) \times GL_2(F_{w^c}))$$

+ un certain nombre d'hypothèses ...

Pour fixer les notations : $S_p = \{ v \mid p,\ \text{places de } F^+ \}$.

$\tilde{S}_p \subset \{ w \mid p,\ \text{places de } F \}$ tq $\tilde{S}_p \xrightarrow{\sim} S_p$.

$\tilde{v} \longmapsto v$.

$U \subset G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$ sous-groupe ouvert compact vérifiant un certain nombre d'hypothèses. $R = \{ v \text{ place de } F^+,\ U_v \text{ non max} \}$.

$T = R \sqcup S_p$.

(λ, τ) type. Espaces de formes automorphes $S_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})$.

$\bar{r} : G_F \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ abs irréd, automorphe ($\Rightarrow \bar{r}^c \simeq \bar{r}^\vee \bar{\varepsilon}^{-1}$)

$\rightsquigarrow \bar{e} : G_{F^+} \longrightarrow \mathcal{G}_2(\mathbb{F})$ $\quad (\mathcal{G}_2 = (GL_2 \times GL_1) \rtimes \{1, j\})$

$\rightsquigarrow m \subset \mathbb{T} = \langle T_w^{(j)} \rangle$, $j = 1, 2$, $w \mid p$ dans F, $w|_{F^+} \notin T$ et ~~déf~~ décomposés, idéal maximal

On considère le $\mathbb{T}_m$-module $S_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})_m$.

<u>Fait</u> (multiplicité 1) $S_{\lambda,\tau}(U, E)_m$ est un $\mathbb{T}_m$-module libre de rang $2^{|R|}$.

[À vérifier, remarquer que sous les hypothèses, si $\pi^U \neq 0$ et $\overline{e(\pi)} \sim \bar{e}$, π sphérique en $v \in R$,

$\Rightarrow \pi_v \simeq \mathrm{Ind}(\mathrm{nr}) \Rightarrow \dim \pi_v^{U_v} = 2$]

Déf $_{\lambda,\tau,T}$ le foncteur $\left\{ \begin{array}{l} A \ \mathcal{O}\text{-alg locale} \\ \text{art de corps } k \end{array} \right. \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{déformations } T\text{-cadrées} \\ \text{de } \bar{e} \text{ à } A \\ \text{tq } e|_{G_{F_{\tilde{v}}}} \text{ de type } (\lambda_{\tilde{v}}, \tau_{\tilde{v}}) \\ v \notin p \end{array} \right.$

Ce foncteur est représentable par la $\mathcal{O}$-algèbre $R_{\mathcal{G}}^{\square_T, \mathrm{univ}}$. On a $R_{\mathcal{G}}^{\mathrm{univ}} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\lambda,\tau}^T$ / $R_{\mathcal{G}}^{\mathrm{univ}}$ et $R_{\mathcal{G}}^{\square_T}$.

$M = S_{\lambda,\tau}(U, \mathcal{O})_m \otimes_{R_{\mathcal{G}}^{\mathrm{univ}}} R_{\mathcal{G}}^{\square_T} \in M[[X_{i,j,v},\ v \in T,\ i, j \in \{1,2\}]]$

$\mathbb{Z}_p$

Thm $\exists\, q \geq [F^+ : \mathbb{Q}]$ tq si $S_\infty = \mathcal{O}[[y_1, \dots, y_{4+4|T|}]]$,

$$R_\infty = \underbrace{\left(\widehat{\bigotimes_{v|p}} R^{\square}_{\bar{r}|_{G_{F_{\tilde{v}}}}}(\lambda_{\tilde{v}}, \tau_{\tilde{v}})\right) \hat{\otimes} \left(\widehat{\bigotimes_{v \nmid p}} R^{\square}_{\bar{r}|_{G_{F_{\tilde{v}}}}}\right)}_{R^{loc}} [[x_1, \dots, x_{q-[F^+:\mathbb{Q}]}]]$$

il existe un (S_∞, R_∞)-bimodule M_∞ ~~tel que~~, et $R_\infty \twoheadrightarrow R^{\square_T}_{\bar{e}}$

- M_∞ est S_∞-libre de type fini et $\mathrm{Im}(R_\infty \to \mathrm{End}(M_\infty))$ est un S_∞-algèbre finie.
- ~~$M_\infty \otimes_{R_\infty} R^{\square_T}_{\bar{e}} \to M$~~ $M_\infty \otimes_{S_\infty} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} M$ et $R_\infty \otimes_{S_\infty} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R^{\square_T, \mathrm{univ}}_{\bar{e}}$.

On a alors la proposition suivante

Proposition : les assertions suivantes sont équivalentes

(1) Le support de M intersecte toutes les composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(R^{loc}[\frac{1}{p}])$.

(2) $M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $R_\infty[\frac{1}{p}]$-module fidèlement plat, localement libre de rang $2^{|T|}$.

(3) $R^{\mathrm{univ}}_{\bar{e}}$ est une $\mathcal{O}$-algèbre finie et $M[\frac{1}{p}]$ est un $R^{\square_T}_{\bar{e}}[\frac{1}{p}]$-module fidèle.

Remarque : La deuxième partie de (3) est une assertion de modularité, la première de relèvement.

Preuve : $R^{\square}_{\bar{r}|_{G_{F_{\tilde{v}}}}}(\lambda_{\tilde{v}}, \tau_{\tilde{v}})[\frac{1}{p}]$ formellement lisse de dim $[F_{\tilde{v}} : \mathbb{Q}_p] + 4$, pour $v|p$

- $R^{\square}_{\bar{r}|_{G_{F_{\tilde{v}}}}}[\frac{1}{p}]$ ——— de dim 4 (CHT).

$\Rightarrow R^{loc}[\frac{1}{p}]$ ——— de dim $4|T| + [F^+ : \mathbb{Q}]$.

$\Rightarrow R^{\infty}[\frac{1}{p}]$ ——— $4|T| + q$.

M_∞ est un S_∞-module libre $\Rightarrow (y_1, \dots, y_{q+4|T|})$ suite M_∞-régulière. $\Rightarrow M_\infty$ est un R_∞-module de Cohen-Macaulay

~~$\Rightarrow M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $R_\infty[\frac{1}{p}]$-module de Cohen-Macaulay.~~

En particulier $\mathrm{Supp}\, M_\infty$ est équidimensionnel, de dim $q + 4|T| = \dim R_\infty$.

$\Rightarrow \mathrm{Supp}\, M_\infty[\frac{1}{p}]$ est une union de composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}\, R_\infty[\frac{1}{p}]$.

L'inclusion $R^{loc} \hookrightarrow R_\infty$, induit une bijection entre

composantes irréd de $\operatorname{Spec} R^{loc}[\frac{1}{p}]$ et celles de $\operatorname{Spec} R_\infty[\frac{1}{p}]$.

Donc (1) $\iff \operatorname{Supp} M_\infty[\frac{1}{p}] = \operatorname{Spec} R_\infty[\frac{1}{p}]$

$\iff M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $R_\infty[\frac{1}{p}]$-module fidèle.

$\iff R_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_\infty$ ~~$\neq 1$~~.

$M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $R_\infty[\frac{1}{p}]$-module de Cohen-Macaulay et $R_\infty[\frac{1}{p}]$ régulier $\Longrightarrow M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $R_\infty[\frac{1}{p}]$ module plat.

(1) $\iff$ fidèlement plat. ~~rang fini $\Rightarrow$ loc libre~~.

Mais comme $M[\frac{1}{p}] = M_\infty[\frac{1}{p}] \otimes_{S_\infty} \mathcal{O}$ est libre de rang $2^{|R|}$,

$M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $R_\infty[\frac{1}{p}]$-module localement libre de rang $2^{|R|}$.

(1) $\Longrightarrow$ (3). $S_\infty \hookrightarrow R_\infty \Rightarrow R_\infty$ est un S_∞-module fini

$\Longrightarrow R_{\bar{e}}^{\text{univ}}$ est un $\mathcal{O}$-module fini.

De plus, $M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $R_\infty[\frac{1}{p}]$-localement libre

$\Longrightarrow M[\frac{1}{p}]$ est un $R_{\bar{e}}^{\text{univ}}[\frac{1}{p}]$-module loc libre

$\Rightarrow M[\frac{1}{p}]$ est un $R_{\bar{e}}^{\text{univ}}[\frac{1}{p}]$ module fidèle.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Fixons $\operatorname{Spec} \bar{R} \subset \operatorname{Spec} R^{loc}$ une composante irréductible et considérons $\bar{R}_{\bar{e}}^{\text{univ}} = R_{\bar{e}}^{\text{univ}} \otimes_{R^{loc}} \bar{R}$.

D'après CHT, on peut prouver que $\dim \bar{R}_{\bar{e}}^{\text{univ}} \geq 1$ (calcul utilisant la dualité de Poitou-Tate).

Par ailleurs, $\bar{R}_{\bar{e}}^{\text{univ}}$ est un $\mathcal{O}$-module fini

$\Longrightarrow \bar{R}_{\bar{e}}^{\text{univ}}[\frac{1}{p}] \neq 0 \Rightarrow \exists\, x : R_{\bar{e}}^{\text{univ}} \longrightarrow E'$ non nul et par fidélité $M \otimes_{R_{\bar{e}}^{\text{univ}}} E' \neq 0 \Rightarrow$ le support de M intersecte $\operatorname{Supp}^{R^{loc}} \bar{R} \subset \operatorname{Spec} \bar{R}$. $\square$

Fixons $L(\lambda, r) \subset \sigma(\lambda, r)$ un réseau stable par $GL_2(\mathcal{O}_{F_p})$.

$0 = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = L(\lambda, r)/\varpi$ filtration de JH

$\rightsquigarrow$ filtration $0 = M_0 \subset \dots \subset M_n = M/\varpi M$.

On peut construire M_∞ de telle sorte qu'il existe sur M_∞/ϖ une filtration par des sous (R_∞, S_∞)-bimodules de telle sorte que M_i/M_{i-1} soit libre de type fini sur S_∞/ϖ, et

$$\left(M_i/M_{i-1}\right) \otimes_{\mathbb{F}_\infty} \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} S_{L_i/L_{i-1}}(U, \mathbb{F})_m \qquad \square$$

et que la classe d'isomorphisme du R_∞-module M_i/M_{i-1} ne dépende que de la classe d'iso de la représentation de $GL_2(\mathcal{O}_{F_v}/\varpi)$ L_i/L_{i-1}, et pas de (λ, τ).

Si ~~$a \in (\mathbb{Z}_+^2)^{\mathrm{Hom}}$~~ $a = (a_v)_{v \in S_p}$, on note, pour $\sigma_a = L_i/L_{i-1}$

$$\mu_a(\bar{\pi}) = \frac{1}{2^{|R|}} e\left(M_i/M_{i-1}, R_\infty/\varpi\right).$$

Si $L_i/L_{i-1} \cong \sigma_a$, on a

<u>Thm</u> : les ~~équivalences de la~~

On a $e(R_\infty/\varpi) \geq \sum_i \mu_{a_i}(\bar{\pi})$ et l'égalité est équivalente aux assertions de la prop précédente.

Preuve : On note $\mathbb{T}_\infty = \mathrm{Im}(R_\infty \to \mathrm{End}(M_\infty))$.

On a tout d'abord $e(\mathbb{T}_\infty/\varpi) = e(M_\infty/\varpi, \mathbb{T}_\infty/\varpi)$.

En effet, $M_\infty[\frac{1}{p}]$ est un $\mathbb{T}_\infty[\frac{1}{p}]$-module loc libre de rang $2^{|R|}$.

$R_\infty \twoheadrightarrow \mathbb{T}_\infty$ donc $e(R_\infty/\varpi) \geq e(\mathbb{T}_\infty/\varpi)$

égalité avec égalité ssi $R_\infty/\varpi \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_\infty/\varpi \iff R_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_\infty \quad \square$

On remarque alors que

$$e\left(R_\infty/\varpi\right) = e\left(R^{loc}/\varpi\right) = \prod_{v|p} e\left(R_{\tilde{v}}^{\lambda_{\tilde{v}}, \tau_{\tilde{v}}}/\varpi\right)$$

2. Déformations potentiellement diagonalisables

$K/\mathbb{Q}_p$ finie

<u>Définition</u> : • On dit que $\rho : G_K \to GL_2(\mathcal{O})$ est diagonale si $\rho = \chi_1 \oplus \chi_2$ avec χ_1 et χ_2 caractères cristallins.

• ρ est dite diagonalisable si elle a ~~même~~ type de HT, λ et se situe sur une même composante irréductible de $\mathrm{Spec}(R^{\square}_{\bar\rho}(\lambda)[\frac{1}{p}])$ qu'une rep diagonale.

• ρ est dite potentiellement diagonalisable si <u>elle se trouve</u> $\exists\, L/K$ finie tq $\rho|_{G_L}$ est diagonalisable.

<u>Thm / exemple</u> : Si ρ est potentiellement BT de type $((0,1)_v)_{v : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p}$, ρ est potentiellement diagonalisable.

Preuve : C'est une conséquence du résultat suivant dû à Kisin et Gee.

$\mathrm{Spec}\, R^{\square}_{\bar\rho}((0,1)[\frac{1}{p}])$ a au plus deux composantes connexes, l'une dont les points fermés sont les déformations ordinaires de $\bar\rho$, l'autre les déf non ordinaires.

Il suffit de choisir L/K suffisamment grand tq

- $\rho|_{G_L}$ est cristalline
- $\bar\rho|_{G_L}$ triviale
- la rep triviale de G_L sur $\mathbb{F}^2$ a un rel cris de poids $(0,1)$ ordinaire et un rel non-ordinaire

$\zeta_p \in L$, $1 \oplus \varepsilon$ convient pour le cas ordinaire.

Sinon on prend $\chi_{LT} : G_{\mathbb{Q}_{p^2}} \to \mathcal{O}^\times$ et $\tilde\rho = \mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}_{p^2}}}^{G_{\mathbb{Q}_p}} \chi_{LT}$,

et L tq $\tilde\rho|_{G_L}$ = trivial. $\square$

L'intérêt de cette notion est le thm suivant, conséquence des travaux de Barnet-Lamb, Gee, Geraghty, Harris, Taylor (BLGHT et BLGG).

<u>Thm</u> $\bar{r} : G_F \to GL_2(\mathbb{F})$ comme ci-dessus. Supposons que $\forall v | p$, tout relèvement de $\bar{r}|_{G_{F_{\tilde{v}}}}$ de type (λ_v, τ_v) soit potentiellement diagonalisable, alors les conditions (1) – (3) du thm sont vérifiées.

Esquisse de preuve

On fixe une congruence $R^{loc} \twoheadrightarrow \bar{R}$, et on veut montrer qu'il existe un relèvement $\rho : G_{F_+} \to GL_2(\mathcal{O})$ qui soit "automorphe". On peut alors choisir une extn totalement réelle résoluble F_1/F_+ et supposer que $\tau_v = 1$ $\forall v$, et que la composante en question contient un point diagonal. On utilise alors la théorie de Hida en se ramenant au cas ordinaire. $\square$

On obtient au final, dans le cas où $\lambda = ((0,1)_v)_{v|p}$

$$e\left(R_\infty / \bar{\omega}\right) = \sum_i \mu_{a_i}(\bar{r}).$$

i.e. $$\prod_{v|p} e\left(R^{\square}_{\bar{r}|_{G_{F_{\tilde{v}}}}}(\lambda_v, \tau_v) / \bar{\omega}\right) = \sum_{\sigma_a = \otimes \sigma_v} \left(\prod_{v|p} m_{\sigma_v}(\lambda_v, \tau_v)\right) \mu_a(\bar{r}).$$

À présent il faut extraire de ces égalités des égalités locales.

3. Retour au cas local

Tout d'abord remarquons que si les $\mu_\sigma(\bar{r})$ existent, ils sont uniques.

<u>Proposition</u> : $\bar{r} : G_K \to GL_2(\mathbb{F})$ continue. Le système d'équations $e\left(R^{\square}_{\bar{r}}((0,1), \tau) / \bar{\omega}\right) = \sum m_\sigma((0,1), \tau)\, \mu_\sigma(\bar{r})$ (d'inconnues $\mu_\sigma(\bar{r})$) a au plus une solution.

Preuve : Supposons qu'il existe entiers $\mu_\sigma(\tau) \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall \tau \qquad \sum_{\tau} \mu_\sigma(\tau)\, m_\sigma(\tau) = 0.$$

les $\mu_\sigma(\tau)$ permettent de construire une forme linéaire

$$\mu : R_{\mathbb{F}_r}(GL_2(k)) \longrightarrow \mathbb{Z}$$ sur le groupe de Grothendieck de $GL_2(k)$ et le système d'équation nous dit exactement que μ s'annule sur le sous module engendré par la réduction des $\sigma(\tau)$ lorsque τ parcourt les types inertiels.

On sait déjà que l'application de réduction mod ϖ

$$R_E(GL_2(k)) \twoheadrightarrow R_{\mathbb{F}}(GL_2(k))$$ est surjective

il suffit donc de prouver que le sous-groupe engendré par les $\overline{\sigma(\tau)}$ est le même que celui engendré par les $\overline{W}$ pour W rep irréd de $GL_2(k)$ sur E.

Classification des rep irréd de $GL_2(k)$ sur E :

- $\chi \circ \det$, $St \otimes (\chi \circ \det)$
- $\mathrm{Ind}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ $\quad \chi_1 \neq \chi_2$ $\longrightarrow$ déjà des types
- supercuspidale

Il reste donc à considérer le cas de St.

On va utiliser un calcul explicite de réd de types (Breuil-Diamond).

$\chi_1, \chi_2 : \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow E^\times$ $\quad n$ le conducteur de $\chi_1\chi_2^{-1}$ est $n \geq 1$

$\sigma = \mathrm{Ind}_{B_n}^{G}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ $\qquad \overline{\sigma} = (\mathrm{Ind}_{B(k)}^{GL_2(k)} \overline{\chi}_1 \otimes \overline{\chi}_2) +$ quelque chose qui ne dépend que de $\psi = \overline{\chi}_1\overline{\chi}_2$ et de n

Choisissons donc $\psi : \mathcal{O}_K^\times \to E^\times$ de niveau $n \geq 2$ de réduction linéaire mod ϖ.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_K^\times \arrow[r, "\sim"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\omega}"'] & k^\times \arrow[r, "L\,]"] & \mathcal{O}_E^\times \end{tikzcd}$$

$$\overline{\sigma}(\chi\psi \oplus \chi\tilde{\psi}^{-1}) = \chi\circ\det + \chi\circ St_\chi + (\mathrm{Ph}\cdot(\chi^2))$$

$$\overline{\sigma}(\chi\psi\tilde{\omega} \oplus \chi\psi\tilde{\omega}^{-1}) = \mathrm{Ind}(\overline{\chi}\omega \oplus \overline{\chi}\tilde{\omega}^{-1}) + \cdots (\chi^2).$$

$$\Rightarrow \quad St_\chi = \overline{\sigma(\chi\psi \oplus \chi\psi^{-1})} - \overline{\sigma(\chi\psi\tilde{\omega} \oplus \chi\psi^{-1}\tilde{\omega}^{-1})} + \sigma(\chi\tilde{\omega} \oplus \chi\tilde{\omega}^{-1}) - \sigma(\chi \oplus \chi).$$

$\square$

On va à présent utiliser le lemme suivant :

<u>Lemme</u> k corps.

(1) $i=1,\dots,n$ $\alpha_i : V_i \hookrightarrow W_i$ k-linéaires. Alors

$\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \hookrightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_n$ injective

(2) $i=1,\dots,n$ $\alpha_i : V_i \to W_i$ k-linéaires et $w_i \in W_i$, $w_i \neq 0$

tq $w_1 \otimes \dots \otimes w_n \in \mathrm{Im}(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n)$. Alors

$v_i, w_i \in \mathrm{Im}(\alpha_i)$

(3) I ensemble $\alpha : \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \to \mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ morph. application, restriction de $\alpha : \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}^I$ $\mathbb{Q}$-linéaire et injective

$v \in \mathbb{Q}^m$ avec $\alpha(v) \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ et supposons qu'il existe $n \geq 1$ tq

$v^{\otimes n} \in (\mathbb{Z}^m_{\geq 0})^{\otimes n}$. Alors $v \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$.

Preuve : (1) OK

(2) $\forall i = 1,\dots,n$ fixé $\varphi_j : W_j \to k$ tq $\varphi_j(w_j) = 1$.

$\vec{v} \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ tq $\alpha(\vec{v}) = w_1 \otimes \dots \otimes w_n$.

$\varphi : W_1 \otimes \dots \otimes W_n \to W_i$ donné par $\varphi_1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \dots \otimes \varphi_n$.

Alors $w_i = \varphi(\alpha(\vec{v})) = \alpha_i\left((\varphi_1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)(\vec{v})\right)$.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \otimes \dots \otimes V_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \dots \otimes \varphi_n"'] & W_1 \otimes \dots \otimes W_n \arrow[r, "\varphi_1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \dots \otimes \varphi_n"] & W_i \\
& V_i \arrow[ur, "\alpha_i"'] &
\end{tikzcd}$$

(3) On peut se ramener au cas à I fini.

Soit $\varphi : \mathbb{Q}^I \to \mathbb{Q}$ tq $\varphi(\mathbb{Q}^I_{\geq 0}) \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et $\varphi(\alpha(v)) = 1$.

On considère

$$(\mathbb{Q}^m)^{\otimes n} \xrightarrow{1 \otimes \alpha^{\otimes(n-1)}} \mathbb{Q}^m \otimes (\mathbb{Q}^I)^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{1 \otimes \varphi^{\otimes(n-1)}} \mathbb{Q}^m$$

On a $\varphi((\mathbb{Q}^m)^{\otimes n}_{\geq 0}) \subset \mathbb{Q}^m_{\geq 0}$, donc

$$v = (1 \otimes \varphi\alpha \otimes \dots \otimes \varphi\alpha)(v^{\otimes n}) \in \mathbb{Q}^m_{\geq 0}.$$

Mais comme $v^{\otimes n} \in (\mathbb{Z}^m_{\geq 0})^{\otimes n}_{\geq 0}$, on doit avoir $v \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. $\square$

<u>Corollaire</u> : $K/\mathbb{Q}_p$ finie, de corp résiduel k,
$\bar{r} : G_K \to GL_2(\mathbb{F})$ continue. Alors $\exists!\ \mu_\sigma(\bar{r}) \geq 0$,
tq $\forall\ (\lambda, \tau)$ avec tq ~~$\bar{r}$ admet un rele pt diag~~
tout relèvement de type (λ, τ) est pt diag, alors
$$e\left(R_{\bar{r}}^{\square, \lambda, \tau} / \varpi\right) = \sum_\sigma m_{\lambda,\tau}(\sigma)\, \mu_\sigma(\bar{r}).$$

Preuve : $\exists\ F^+$ corp tot réel, F/F^+ est CM,
$\bar{r} : G_F \to GL_2(\mathbb{F})$ vérifiant toutes nos hypothèses tq
$\bar{r}|_{G_{F_{\tilde{v}}}} \simeq \bar{r}$.

On a alors $e\left(R_{\bar{r}}/\varpi\right) = \sum_{a = \{\sigma_v\}_{v|p}} \left(\prod m_{\lambda_v, \tau_v}(\sigma_v)\right) \mu_a(\bar{r})$.

$\sigma_1, \dots, \sigma_m$ rep des classes d'iso de rep irréd de $GL_2(k)$
mod ϖ. $I = \{(\lambda, \tau)$ vérifient la classe de pt diag$\}$

$$\alpha : \mathbb{Q}^m \longrightarrow \mathbb{Q}^I$$
$$(\mu_\sigma) \longmapsto \left(\sum m_{\lambda,\tau}(\sigma)\mu_\sigma\right)_{(\lambda,\tau)\in I}$$

- α injective et $\alpha(\mathbb{Z}_{\geq 0}^m) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$.

$w = e\left(R_{\bar{r}}^{\square}(\lambda,\tau)/\varpi\right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$.

$\exists\ v_n \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^m)^{\otimes n}$ $\quad (n = |\{v|p\}|)$.

($\mu_a(\bar{r})$ sont les coeff des v_n) tq $\alpha(v_n) = w \otimes \cdots \otimes w$.

$\Rightarrow w = \alpha(v)$ pour $v \in \mathbb{Q}^m$. Mais $\alpha^{\otimes n}$ injective

$\Rightarrow v_n = v^{\otimes n}$.

Comme $\alpha^{\otimes n}(v^{\otimes n}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)^{\otimes n}$ et $\alpha(v) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^I$, on doit
avoir $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ $\quad v = (\mu_\sigma)$ $\quad \square$.

<u>Remarques sur le calcul des μ_σ</u>

~~Supposons~~ Rappelons que si σ rep irréd de $GL_2(k)$,
on peut lui associer $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}_+^2$ tq $\overline{\sigma(\lambda_\sigma)} \simeq \sigma$.
Alors ~~si~~ $\mu_\sigma(\bar{r}) \neq 0 \Rightarrow \bar{r}$ a un relevé cristallin
de poids HT λ_σ.

$K/\mathbb{Q}_p$ non ramifiée et supposons σ régulier,

$$\sigma = \bigotimes_{v : K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p} \det{}^{a_v} \otimes \mathrm{Sym}^{b_v - a_v - 1} \qquad (b_v - a_v \leq p-1).$$

Alors $e(\mu_\sigma, \pi) = e\left(R^{\square}_{\bar{r}}(\lambda_\sigma) / \bar{\omega} \right)$

Si σ est FL-régulier, cette multiplicité est 1.

(On montre que les rep cristallines de FL sont pot-diagonalisables + un résultat de Gao et Liu).