Site étale des espaces adiques

Arthur-César Le Bras

GDT 2012

Cet exposé a pour objectif d'énoncer quelques faits généraux et résultats techniques sur le site étale d'un espace adique, qui seront utiles pour la suite de ce groupe de travail. Tous les résultats qui suivent (ou presque) sont recopiés du livre de R. Huber, *Etale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Les numéros y font référence.

1) Quelques rappels sur les espaces adiques

Définition 1. Soit k un corps non archimédien.

Une *k-algèbre de Tate* est une k-algèbre A pour laquelle il existe un sous-anneau A_0 tels que les rA_0, $r \in k^\times$ forment une base de voisinages de 0. On note A^0 le sous-anneau des éléments à puissances bornées de A, $A^0 = \{a \in A, (a^n)_n \text{ bornée}\}$.

Une *k-algèbre affinoïde* est une paire (A, A^+), avec A une k-algèbre de Tate, et A^+ un sous-anneau ouvert et intégralement clos de A^0.

Huber définit en fait plus généralement la notion d'*anneau de Tate*, et d'*anneau affinoïde* (sans référence à un corps de base k). J'emploierai ces termes désormais, même si dans la pratique on aura affaire en général à des k-algèbres.

Définition 2. Soit (A, A^+) un anneau affinoïde. Soit

$$X = \mathrm{Spa}(A, A^+) = \{|.| : A \to \Gamma \cup \{0\} \text{ valuation continue}, |f| \leq 1, \forall f \in A^+\}/\simeq$$

le *spectre adique* de (A, A^+). On munit X de la topologie engendrée par les ensembles $\{x, |a(x)| \leq |b(x)| \neq 0\}$, $a, b \in A$. Une base d'ouverts de cette topologie est formée des *ensembles rationnels*

$$U(\frac{f_1, \ldots, f_n}{g}) = \{x \in X, \forall i, |f_i(x)| \leq |g(x)|\},$$

avec $f_1, \ldots, f_n, g \in A$, et $f_1A + \cdots + f_nA = A$.

Exemple 1. Soit $A = \mathbf{C}_p\langle T\rangle$, $A^+ = A^0 = \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}\langle T\rangle$. L'espace $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ (le disque unité) possède cinq types de points, dont quatre étaient déjà présents dans la théorie de Berkovich. Pour obtenir X à partir de l'espace de Berkovich correspondant, on ajoute un cercle ($\simeq \mathbf{P}^1(\bar{\mathbf{F}}_p)$) de points-base tangentiels autour de chaque point de type (2), puis on retire un point-base tangentiel dans l'adhérence du point de Gauss (celui qui correspond au choix d'un élément abstrait γ, avec $1 < \gamma < r$, pour tout $r \in \mathbf{R}$, $r > 1$: le choix d'un tel élément définit une valuation continue sur A, mais elle ne vérifie pas la condition relative à A^+ imposée par la définition du spectre adique).

Tous les points sauf les points de type (2) sont des points fermés. L'adhérence d'un point de type (2) contient tous les points de type (5) autour. C'est une illustration du principe suivant : si y est un point d'un espace adique, l'ensemble des généralisations de y (i.e. l'ensemble des x tels que $y \in \bar{\{x\}}$) est une chaîne totalement ordonnée de longueur le rang de la valuation correspondant à y. En fait si (A, A^+) est un anneau affinoïde, $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$, $x, y \in X$ deux points correspondant à deux morphismes $(A, A^+) \to (K, K^+)$ et $(A, A^+) \to (L, L^+)$ respectivement, alors x se spécialise sur y ssi $K \simeq L$, $L^+ \subset K^+$.

Soit (A, A^+) un anneau affinoïde. On peut munir $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ d'un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$. Si $x \in X$, on note $k(x)$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X,x}$, π la projection canonique $\mathcal{O}_{X,x} \to k(x)$, $k(x)^+$ l'image de $\mathcal{O}_{X,x}^+$ dans $k(x)$ par π. On munit $\mathcal{O}_{X,x}$ et $k(x)$ des valuations associées respectivement à $\mathcal{O}_{X,x}^+$ et $k(x)^+$.

Proposition 1. *L'application $\hat{\pi} : (\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x}^+)^\frown \to (k(x), k(x)^+)^\frown$ est un isomorphisme.*

Scholze démontre un résultat analogue : avec les notations de la proposition, et dans le cas où A est une k-algèbre affinoïde (k corps non archimédien), les complétions de $\mathcal{O}_{X,x}^+$ et $k(x)^+$ sont isomorphes, où l'on considère cette fois-ci les complétions pour la topologie ϖ-adique, avec $\varpi \in k$ topologiquement nilpotent. La preuve consiste simplement à constater que le noyau de la flèche π est ϖ-divisible. Il en va de même pour la proposition.

Exemple 2. Soit k un corps non archimédien. On prend

$$\mathcal{O}_{X,x} = k\langle T\rangle \quad ; \quad \mathcal{O}_{X,x}^+ = \{\sum_n a_n T^n \in k\langle T\rangle, a_0 \in k^0\}.$$

La valuation associée est donc $\sum_n a_n T^n \mapsto |a_0|$. On voit que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local d'idéal maximal engendré par T. On a donc $k(x) = k$, $k(x)^+ = k^0$.

On définit ensuite les espaces adiques comme les espaces modelés localement sur les espaces formés par le spectre adique d'un anneau affinoïde. Voir les livres pour les détails.

Convention. Désormais, les espaces adiques considérés sont les espaces adiques qui sont localement de la forme $\mathrm{Spa}(A, A^+)$, avec un A un anneau de Tate fortement noethérien (i.e. tel que pour tout n, $A\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ est noethérien). Scholze appelle ces espaces des *espaces adiques localement noethériens* ; nous dirons simplement *espaces adiques*. On verra plus tard que les résultats sur le site étale des espaces perfectoïdes se ramènent à ceux pour le site étale des espaces localement noethériens.

Rappelons enfin la notion de morphisme étale dans le cadre adique.

Définition 3. Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces adiques. On dit que f est *étale* si f est localement de présentation finie et si, pour tout anneau affinoïde A, tout idéal I de $A^{\triangleright}$, avec $I^2 = 0$, et tout morphisme $\mathrm{Spa}(A) \to Y$, l'application $\mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spa}A, X) \to \mathrm{Hom}_Y(\mathrm{Spa}A/I, X)$ est bijective.

Proposition 2 (1.7.1)**.** *Soient A un anneau affinoïde (non nécessairement complet), et $s : X \to Y = \mathrm{Spa}A$ un morphisme entre espaces adiques affinoïdes. S'équivalent :*
- *Le morphisme s est étale ;*
- *Il existe des sous-ensembles finis $T_1, \dots, T_n$ de $A^{\triangleright}$, avec $T_i.A^{\triangleright}$ ouvert de $A^{\triangleright}$, pour tout i, et $f_1, \dots, f_n \in A^{\triangleright}\langle X_1, \dots, X_n\rangle_{T_1,\dots,T_n}$ tels que si l'on note $B = A\langle X_1, \dots, X_n\rangle_{T_1,\dots,T_n}$, $I = f_1 B^{\triangleright} + \dots + f_n B^{\triangleright}$, l'image de $\det(\partial f_i/\partial X_j)_{i,j}$ dans $B^{\triangleright}/I$ est une unité et X est Y-isomorphe à $\mathrm{Spa}B/I$;*
- *Il existe des sous-ensembles finis $T_1, \dots, T_n$ de $A^{\triangleright}$, avec $T_i.A^{\triangleright}$ ouvert de $A^{\triangleright}$, pour tout i, et $f_1, \dots, f_n \in A[X_1, \dots, X_n]$ tels que si l'on note $B = A\langle X_1, \dots, X_n\rangle_{T_1,\dots,T_n}$, $I = f_1 B^{\triangleright} + \dots + f_n B^{\triangleright}$, l'image de $\det(\partial f_i/\partial X_j)_{i,j}$ dans $B^{\triangleright}/I$ est une unité et X est Y-isomorphe à $\mathrm{Spa}B/I$.*

L'équivalence des points (ii) et (iii) de la proposition précédente rend plausible le corollaire suivant.

Corollaire 1 (1.7.3)**.** *Soient A un anneau affinoïde, D un anneau, et $\varphi : D \to A^{\triangleright}$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme φ induit un morphisme d'espaces localement annelés $\mathrm{Spa}A \to \mathrm{Spec}D$. Tout schéma X localement de type fini sur $\mathrm{Spec}D$ définit alors un espace adique $X^{\mathrm{ad}} = X \times_{\mathrm{Spec}D} \mathrm{Spa}A$ localement de type fini sur $\mathrm{Spa}A$. Alors,*
- *Si $X \to \mathrm{Spec}D$ est étale, $X^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{Spa}A$ est un morphisme étale d'espaces adiques.*
- *Soit Y un espace affinoïde, et $f : Y \to \mathrm{Spa}A$ un morphisme étale. Si $\mathrm{Im}\varphi$ est dense dans $A^{\triangleright}$, il existe un schéma affine X, un morphisme étale $X \to \mathrm{Spec}D$ et une immersion ouverte d'espaces adiques $g : Y \to X^{\mathrm{ad}}$, tels que $h \circ g = f$ (avec $h : X^{\mathrm{ad}} \to \mathrm{Spec}A$ le morphisme structural).*
- *Soit Y un espace adique affinoïde, et $f : Y \to \mathrm{Spa}A$ un morphisme d'espaces adiques. Il est équivalent de dire que f est étale ou de dire qu'il existe un anneau affinoïde B, un morphisme d'anneaux (algébriquement) de type fini $A \to B$ entre anneaux affinoïdes, tel que $A^{\triangleright} \to B^{\triangleright}$ est étale (au sens algébrique) et tel que Y est $\mathrm{Spa}A$-isomorphe à $\mathrm{Spa}B$.*

2) Le site étale d'un espace adique

Définition 4. Le *site étale* X_{et} d'un espace adique X est la catégorie Et/X des espaces adiques étales sur X, équipée de la topologie de Grothendieck dont les recouvrements sont les familles de morphismes $(f_i : U_i \to U)_{i\in I}$, telles que $U = \bigcup_{i\in I} f_i(U_i)$. Le topos du site X_{et} est noté $X_{\mathrm{et}}\tilde{}$.

Si X est une variété analytique rigide, le topos $X^{\mathrm{ad}}_{\mathrm{et}}\tilde{}$ de l'espace adique associé X^{ad} est équivalent au topos du site étale X_{et}, site qui est la catégorie des variétés rigides analytiques étales sur X, munie de la topologie de Grothendieck dont les recouvrements sont les familles de morphismes fortement surjectifs (*strongly surjective*). Cf. 2.1.1.

On va avoir besoin d'introduire le topos étale d'espaces plus généraux, les espaces prépseudo-adiques (*prepseudo-adic spaces*).

Définition 5 (1.10)**.** Un *espace prépseudo-adique* est une paire (X, S) avec X un espace adique, S un sous-ensemble de X. Un morphisme d'espaces prépseudo-adiques $(X, S) \to (Y, T)$ est un morphisme d'espaces adiques $f : X \to Y$ tel que $f(S) \subset T$.

Si X est un espace prépseudo-adique (A, S), on notera souvent $\underline{X} = A$, $|X| = S$.

Définition 6. Le *site étale* X_{et} d'un espace prépseudo-adique X est la catégorie Et/X des espaces prépseudo-adiques étales sur X (un morphisme $f : Y \to Z$ entre espaces prépseudo-adiques est dit étale si $\underline{f} : \underline{Y} \to \underline{Z}$ l'est et si $|Y|$ est ouvert dans $\underline{f}^{-1}(|Z|)$), munie de la topologie dont les recouvrements sont les familles $(f_i : Y_i \to Y)_i$ de morphismes dans Et/X telles que $\bigcup_i |f_i|(|Y_i|) = |Y|$. Le topos de ce site est noté $X_{\tilde{\text{et}}}$.

Tout ce vocabulaire pénible est nécessaire pour formuler certains résultats qui vont arriver, à commencer par le suivant.

Proposition 3 (2.3.10)**.** *Soient X un espace adique et $x \in X$. Soit K l'hensélisé du corps résiduel $k(x)$ relativement à l'anneau de valuation $k(x)^+$ de $k(x)$* [1]*. Alors le topos étale $(X, \{x\})_{\tilde{\text{et}}}$ de l'espace prépseudo-adique $(X, \{x\})$ est naturellement équivalent au topos étale* $(\text{Spec}K)_{\tilde{\text{et}}}$ *du schéma* $\text{Spec}K$.

Soient $R = (\text{Spa}(K, K^+), \{r_0\})$ (r_0 le point fermé), $S = (\text{Spa}(k(x), k(x)^+), \{s_0\})$ (s_0 le point fermé). La preuve consiste à considérer les morphismes de topoï $a : R_{\tilde{\text{et}}} \to (\text{Spec}K)_{\tilde{\text{et}}}$, $b : R_{\tilde{\text{et}}} \to S_{\tilde{\text{et}}}$, et $c : S_{\tilde{\text{et}}} \to (X, \{x\})_{\tilde{\text{et}}}$, induits par les applications évidentes, et à montrer que chacun de ces morphismes sont des équivalences.

Soit I une catégorie cofiltrée, $\mathcal{A}$ la catégorie dont les objets sont les espaces prépseudo-adiques quasi-séparés et quasi-compacts, et dont les morphismes sont les morphismes adiques d'espaces prépseudo-adiques. Soit $p : I \to \mathcal{A}$ un foncteur, $c : I \to \mathcal{A}$ un morphisme constant associé à un X objet de $\mathcal{A}$, et $\varphi : c \to p$ un morphisme de foncteurs.

Définition 7. On écrit

$$\varphi : X \sim \varprojlim_i X_i$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

- Notons $\varprojlim |X_i|$ la limite projective du foncteur $I \to Top$, $i \mapsto |X_i|$. Alors l'application $\psi : |X| \to \varprojlim |X_i|$ induite par φ est un homéomorphisme.
- Pour tout $x \in |X|$, il existe un ouvert affinoïde U de $\underline{X}$ contenant x tel que $\bigcup_{(i,V)} \text{Im}(\varphi_i^* : \mathcal{O}_{\underline{X_i}}(V) \to \mathcal{O}_{\underline{X}}(U))$ est dense dans $\mathcal{O}_{\underline{X}}(U)$, l'union étant prise sur tous les couples (i, V), avec i objet de I et V ouvert de $\underline{X_i}$, satisfaisant $\underline{\varphi_i}(U) \subset V$.

1. L'anneau $k(x)^+$ est un anneau de valuation ; on peut considérer son hensélisé K^+. Par défintion K est alors le corps des fractions de K^+.

Proposition 4 (2.4.6)**.** *On garde les notations de la définition précédente. On suppose en outre que I admet un objet final 0. Soit F_0 un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de groupes abéliens) sur $X_{0,et}$. Soit $F \in X_{\mathrm{et}}\tilde{}$ la préimage de F_0, et définition analogue pour F_i, $i \in I$. Alors si $\varphi : X \sim \varprojlim X_i$, pour $n = 0$ (resp. $n \in \{0,1\}$, resp. $n \in \mathbf{N}$), l'application naturelle*

$$\varinjlim_i H^n(X_i, F_i) \to H^n(X, F)$$

est bijective.

Définition 8. Un *point géométrique* (dans la catégorie des espaces prépseudo-adiques) est un espace S, tel que $\underline{S}$ soit le spectre d'un corps affinoïde séparablement algébriquement clos, et $|S| = \{s\}$ soit le point fermé de $\underline{S}$.

Soit X un espace prépseudo-adique. Un *point géométrique de* X est un morphisme d'espaces prépseudo-adiques $\xi \to X$, avec ξ un point géométrique.

Soit X un espace prépseudo-adique, et $x \in |X|$. Soit $\bar{k}(x)$ une clôture algébrique séparable de $k(x)$, et $\bar{k}(x)^+$ un anneau de valuation de $\bar{k}(x)$ qui étend $k(x)^+$. Alors

$$\bar{\kappa}(x) := (\bar{k}(x), \bar{k}(x)^+)$$

est un corps affinoïde séparablement algébriquement clos. On pose

$$\bar{x} = (\mathrm{Spa}\bar{\kappa}(x), \{s\})$$

avec s le point fermé de $\mathrm{Spa}\bar{\kappa}(x)$. L'inclusion $k(x) \to \bar{k}(x)$ induit un morphisme d'espaces prépseudo-adiques

$$\bar{x} \to X.$$

Définition 9. Soit $u : \xi \to X$ un point géométrique des l'espace prépseudo-adique X. Pour tout faisceau F sur X_{et}, on pose

$$F_\xi := \Gamma(\xi, u^*F).$$

C'est la *tige* de F en ξ.

Lemme 1 (2.5.4)**.** *Soient X un espace prépseudo-adique et $u : \xi \to X$ un point géométrique de X. Notons C_ξ la catégorie des paires (V, v), avec V étale sur X, et $v : \xi \to V$ un X-morphisme. La catégorie C_ξ est cofiltrée, et pour tout préfaisceau P sur X_{et}, on dipose d'une bijection fonctorielle*

$$(aP)_\xi \simeq \varinjlim_{(V,v)\in C_\xi} P(V),$$

où aP désigne le faisceau associé à P.

Définition 10. Soit X un espace prépseudo-adique. On dit que X est *strictement local* si $\underline{X}$ a un unique point fermé x, $x \in |X|$, et $\mathcal{O}_{\underline{X},x}$ est un anneau strictement local. Cela équivaut à dire que $\underline{X}$ est le spectre adique d'un d'un anneau affinoïde (A, A^+), avec A strictement local, d'unique point fermé $x \in |X|$ de support l'idéal maximal de A.

Remarque 1. Si X est le spectre adique d'un anneau affinoïde (A, A^+), A local, et x un point de support l'idéal maximal de A. Alors x est l'unique point fermé de X ssi $A^+ = \{a \in A, |a(x)| \leq 1\}$.

En effet, supposons que x soit l'unique point fermé de X. Alors tout point de X se spécialise sur x ; soit $B = \{a \in A, |a(x)| \leq 1\}$. Si $b \in B$, $\{z \in A, |b(z)| \leq 1\}$ est un ouvert de X contenant x. Il contient donc z, i.e. $|b(z)| \leq 1$. Ceci valant pour tout $b \in B$, on en déduit que $B \subset \{a \in A, \forall a \in A, |a(z)| \leq 1\} = A^+$. L'autre inclusion étant évidente, on a l'égalité.

Réciproquement, supposons que $A^+ = \{a \in A, |a(x)| \leq 1\}$. Soient z un point de X, $U = \{y \in X, |a(y)| \leq |b(y)| \neq 0\}$ $(a, b \in A)$ un ouvert contenant x. Comme $b(x) \neq 0$, b est une unité de A. Comme $|a/b(x)| \leq 1$, on a $a/b \in A^+$. Donc $|a/b(z)| \leq 1$, i.e. $z \in U$.

On note D_ξ la sous-catégorie pleine de C_ξ formée des couples (V, v) avec $\underline{V}$ affinoïde. C'est une catégorie cofinale dans C_ξ. Posons

$$\mathcal{O}_{X,\xi} := \varinjlim_{(V,v)\in C_\xi} \mathcal{O}_{\underline{V}}(\underline{V}) = \varinjlim_{(V,v)\in C_\xi} \mathcal{O}_{\underline{V}}(\underline{V}),$$

$$\mathcal{O}^+_{X,\xi} := \varinjlim_{(V,v)\in C_\xi} \mathcal{O}^+_{\underline{V}}(\underline{V}) = \varinjlim_{(V,v)\in C_\xi} \mathcal{O}^+_{\underline{V}}(\underline{V}).$$

On les munit d'une topologie de sorte que $(\mathcal{O}_{X,\xi}, \mathcal{O}^+_{X,\xi})$ soit un anneau affinoïde. On pose

$$X(\xi)_- = \mathrm{Spa}(\mathcal{O}_{X,\xi}, \mathcal{O}^+_{X,\xi}),$$

et

$$|X(\xi)| = \bigcap_{(V,v)\in D_\xi} \underline{\varphi}^{-1}_{(V,v)}(|V|).$$

Alors $X(\xi) := (X(\xi)_-, |X(\xi)|)$ est un espace prépseudo-adique, et on dispose d'un morphisme naturel $X(\xi) \to X$, et d'un X-morphisme naturel $\xi \to X(\xi)$. On vérifie que $X(\xi)$ est un espace strictement local au sens de la définition précédente.

Définition 11. Soit X un espace prépseudo-adique, ξ un point géométrique de X. L'espace prépseudo-adique strictement local $X(\xi)$ est appelé la *localisation stricte* de X en ξ.

Proposition 5 (2.5.12)**.** *Soient X un espace prépseudo-adique, ξ un point géométrique de X. Soit E_ξ la sous-catégorie pleine de D_ξ (et cofinale dans D_ξ) formée des couples (V, v) avec $|V|$ quasi-compact. Les morphismes $\varphi_{(V,v)} : X(\xi) \to V$ donnent*

$$\varphi : X(\xi) \sim \varprojlim_{(V,v)\in E_\xi} V.$$

C'est immédiat, on a tout fait pour ! La proposition suivante est importante, car elle montre que les localisés stricts d'un espace analytique adique ont une structure très simple.

Proposition 6 (2.5.13)**.** *Soit X un espace prépseudo-adique. Soit $\xi \to X$ un point géométrique de X, $x \in |X|$ l'image du point fermé de $\underline{\xi}$.*

Supposons que x soit un point analytique[2] *de $\underline{X}$. Soit $p : \mathrm{Spa}(\bar{\kappa}(x)) \to \underline{X}$ le morphisme naturel. Alors la complétion de $(\mathcal{O}_{X,\xi}, \mathcal{O}^+_{X,\xi})$ est isomorphe à la complétion de $\bar{\kappa}(x)$, et $X(\xi)$ est X-isomorphe à l'espace prépseudo-adique $(\mathrm{Spa}\bar{\kappa}(x), p^{-1}(|X|))$.*

Soit x un point de $\underline{X}$ non analytique. Soient $U = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ un voisinage ouvert affinoïde de x dans $\underline{X}$, tel que A ait un anneau de définition noethérien, B l'hensélisé strict de A relativement à l'idéal premier $\mathrm{supp}(x) \in \mathrm{Spec}A$, y une valuation de B étendant la valuation x de A. Notons B^+ l'anneau de valuation de y, et munissons B de la topologie $I.B$-adique, B désignant l'idéal de définition de la topologie de A. Alors (B, B^+) est un anneau affinoïde et l'on dispose d'un morphisme d'espaces adiques $p : \mathrm{Spa}(B, B^+) \to \underline{X}$. Alors la complétion de $(\mathcal{O}_{\underline{X},x}, \mathcal{O}^+_{\underline{X},x})$ est isomorphe à la complétion de (B, B^+) et $X(\xi)$ est X-isomorphe à l'espace prépseudo-adique $(\mathrm{Spa}(B, B^+), p^{-1}(|X|))$.

La preuve du point (i) utilise une fois de plus le fait que le complété de l'anneau local coïncide avec le complété du corps résiduel.

Proposition 7 (2.6.1)**.** *Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces prépseudo-adiques (on impose à f des conditions techniques raisonnables que je passe sous silence), ξ un point géométrique de Y, et $Y(\xi)$ le localisé strict de Y en ξ. Soit F un faisceau d'ensembles (resp. de groupes, resp. de groupes abéliens) sur X_{et}, G la préimage de F sur $(X \times_Y Y(\xi))_{\mathrm{et}}$. Alors, pour $n = 0$ (resp. $n \in \{0, 1\}$, resp. $n \in \mathbf{N}$), on dispose d'une bijection naturelle*

$$(R^n f_* F)_\xi \simeq H^n(X \times_Y Y(\xi), G).$$

Démonstration. On a vu dans le lemme 1 que

$$(R^n f_* F)_\xi = \varinjlim_{(V,v) \in E_\xi} H^n(X \times_Y V, F).$$

Or, par la proposition 5,

$$Y(\xi) \sim \varprojlim_{(V,v) \in E_\xi} V,$$

et donc (c'est ici qu'interviennnent les hypothèses sur f)

$$X \times_Y Y(\xi) \sim \varprojlim_{(V,v) \in E_\xi} X \times_Y V.$$

On en déduit le résultat par la proposition 4. □

2. C'est-à-dire un point ayant un voisinage ouvert U tel que $\mathcal{O}_X(U)$ possède une unité topologiquement nilpotente.

Exemple 3. Soient $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces prépseudo-adiques analytiques (mêmes hypothèses sur f), y un point maximal de $|Y|$. Alors $Y(\bar{y}) = \bar{y}$, et donc, pour tout faisceau F sur X_{et},

$$(R^n f_* F)_{\bar{y}} \simeq H^n(X \times_Y \bar{y}, F).$$

Pour terminer cette section, voici un théorème de changement de base pour les morphismes propres dans le cadre adique. La démonstration de ce résultat repose sur un théorème difficile de Huber de comparaison entre cohomologies étales des schémas et des espaces adiques (cf. ci-dessous), mais je le cite car la preuve donne un exemple d'utilisation de la proposition ci-dessus et car Scholze l'utilise dans son article *p-adic Hodge theory for rigid analytic varieties.*

Le cadre est le suivant. Soient R un espace adique, S un schéma et $\varphi : R \to S$ un morphisme d'espaces localement annelés. Soient X, Y des schémas localement de type fini sur S, $f : X \to Y$ un S-morphisme. On peut alors définir des espaces adiques localement de type fini sur R :

$$X^{\mathrm{ad}} := X \times_S R \quad ; \quad Y^{\mathrm{ad}} := Y \times_S R.$$

Le morphisme f induit un morphisme d'espaces adiques $f^{\mathrm{ad}} : X^{\mathrm{ad}} \to Y^{\mathrm{ad}}$. On note $\varphi_X : X^{\mathrm{ad}} \to X$ et $\varphi_Y : Y^{\mathrm{ad}} \to Y$ les morphismes naturels ; ils induisent des morphismes de sites $(X^{\mathrm{ad}})_{\mathrm{et}} \to X_{\mathrm{et}}$, $(Y^{\mathrm{ad}})_{\mathrm{et}} \to Y_{\mathrm{et}}$.

Théorème 1 (3.7.2)**.** *On conserve les notations précédentes. Supposons en outre f propre. Soit A un anneau de torsion. Le morphisme de foncteurs de changement de base de $D^+(X_{\mathrm{et}}, A)$ dans $D^+((Y^{\mathrm{ad}})_{\mathrm{et}}, A)$*

$$\varphi_Y^* \circ R^+ f_* \to R^+(f^{\mathrm{ad}})_* \circ \varphi_X^*$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On peut supposer $Y = S$. Alors $Y^{\mathrm{ad}} = R$, $\varphi_Y = \varphi$. On peut supposer S affine, R affinoïde. Alors φ se factorise à travers $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_R(R)$. En appliquant le théorème de changement de base propre usuel pour $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_R(R) \to S$, on peut supposer $S = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_R(R)$.

On est donc ramené à montrer que, pour tout A-module F sur X_{et}, et tout $n \geq 0$, l'application naturelle

$$\varphi^* R^n f_* F \to R^n (f^{\mathrm{ad}})_* \varphi_X^* F$$

est un isomorphisme. Soit $u : \xi \to R$ un point géométrique de $Y^{\mathrm{ad}} = R$. Par composition avec φ, on en déduit un point géométrique η de S. Comme $(\varphi^* R^n f_* F)_\xi = (R^n f_* F)_\eta$, on doit montrer que

$$(R^n f_* F)_\eta \simeq (R^n (f^{\mathrm{ad}})_* \varphi_X^* F)_\xi.$$

Soit B l'hensélisé strict de l'anneau $\mathcal{O}_S(S) = \mathcal{O}_R(R)$ en l'idéal premier image de η. On choisit une valuation v de B étendant la valuation de $\mathcal{O}_R(R)$ donnée par l'image du point fermé de ξ dans R. Ceci définit un anneau de valuation B^+, qu'on munit de la topologie ayant pour base de voisinages de zéro les $I^n B$, $n \in \mathbf{N}$, I idéal de définition de

$\mathcal{O}_R(R)$. Alors comme déjà vu dans la proposition 6, (B, B^+) est un anneau affinoïde, et $\mathrm{Spa}(B, B^+)$ est le localisé strict de R en ξ, $R(\xi)$.

Il faut alors vérifier que f vérifie les hypothèses de la proposition 7. Je laisse cela de côté. On peut alors appliquer cette proposition, et en déduire que

$$(R^n(f^{\mathrm{ad}})_*\varphi_X^* F)_\xi = H^n(X^{\mathrm{ad}} \times_R \mathrm{Spa}(B, B^+), G),$$

G étant la préimage de $\varphi_X^* F$ sur $X^{\mathrm{ad}} \times_R \mathrm{Spa}(B, B^+)$. De même,

$$(R^n f_* F)_\eta = H^n(X \times_S \mathrm{Spec} B, L),$$

L étant la préimage de F sur $X \times_S \mathrm{Spec} B$. On conclut alors avec un théorème de comparaison difficile et important de Huber [3] que les membres de droite des deux égalités précédentes sont isomorphes. Cela conclut. □

3. Huber a développé sa théorie des espaces adiques pour obtenir des résultats sur la cohomologie étale des variétés analytiques rigides. Des théorèmes de ce type sont donc cruciaux, puisqu'ils permettent de s'assurer d'une part que la théorie que l'on obtient est raisonnable ; d'autre part de ramener la démonstration de certains énoncés à leurs analogues familiers sur les schémas affines.